KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die beiden geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ sind wegen $\left|\frac{1}{3}\right|<1$ bzw. $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ absolut konvergent.
Ihre Reihenwerte sind gegeben durch $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$.

a) Wir bezeichnen mit $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ das Cauchy-Produkt dieser beiden Reihen. Nach Definition gilt dann $c_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1^{n-k}2^k}{3^{n-k}3^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^n}=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}2^k$. Mit Hilfe der geometrischen Summenformel erhalten wir schließlich $c_n=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}2^k=\frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=\frac{2\cdot 2^n-1}{3^n}=2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Daraus folgt unter Berücksichtigung den oben angegebenen Reihenwerte
$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=$
$2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\cdot 3-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

b) Direkt aus den oben angegebenen Reihenwerten folgt $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}$.

Aufgabe 2

Sei $q\in(0,1)$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ ist dann absolut konvergent. Nach Satz 10 in 8.4 gilt

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}q^kq^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n\sum_{k=0}^{n}1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

Diese Reihe ist als Cauchyprodukt absolut konvergenter Reihen ebenfalls absolut konvergent. Indem man das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ bildet, ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-q}\right)^2\cdot\frac{1}{1-q}&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^kq^{n-k}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n\sum_{k=0}^{n}(k+1)\right)\overset{\text{Bsp. 1 in 5.4}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)q^n.\end{aligned}$$

Für die gegebene Reihe erhalten wir daher

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n=2\left(\frac{1}{1-q}\right)^2\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{2}{(1-q)^3}.$$

Aufgabe 3

a) **i)** $2e^{\frac{5}{4}\pi i}=2\Big(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\Big)=2\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\big)\Big)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

ii) $\arg e^{3-\frac{3}{8}\pi i}=\arg(e^3\cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i})\overset{e^3\geq 0}{=}\arg e^{-\frac{3}{8}\pi i}\overset{-\frac{3}{8}\pi\notin[0,2\pi)}{=}-\frac{3}{8}\pi+2\pi=\frac{13}{8}\pi$.

iii) $\left|e^{-1+\pi^2 i}\right|=\left|e^{-1}\cdot e^{\pi^2 i}\right|=|e^{-1}|\cdot|e^{\pi^2 i}|=\frac{1}{e}\cdot 1=\frac{1}{e}$.

b) Wir setzen $x:=\operatorname{Re}z$ und $y:=\operatorname{Im}z$.

i) Es gilt $|e^{2z}| = |e^{2x}e^{2iy}| = e^x$ und $\arg e^{2z} = \arg(e^{2x}e^{2iy}) = 2y - 2k\pi$ mit einem geeignetem $k \in \mathbb{Z}$. Ein Vergleich der Polardarstellung beider Seiten der Gleichung $e^{2z} = 4$ liefert somit $e^{2x} = 4$ und $2y - 2k\pi = 0$. Das ist gleichbedeutend mit $x = \ln 2$ und $y = k\pi$.
Die Menge der Lösungen der Gleichung $e^{2z} = 4$ ist also $\{\ln 2 + ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

ii) Es gilt $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Daraus folgt $|\exp(z^2)| = \left|e^{(z^2)}\right| = \left|e^{x^2-y^2} \cdot e^{2xyi}\right| = e^{x^2-y^2}$. Wegen $x, y \in \mathbb{R}$ ist $e^{x^2-y^2} = 1$ gleichbedeutend mit $x^2 - y^2 = 0$. Die letzte Gleichung ist genau für $x = y$ oder $x = -y$ erfüllt.
Die Menge der Lösungen der Gleichung $\left|e^{z^2}\right| = 1$ ist also
$\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \text{ oder } \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z \}$.
(In der komplexen Ebene sind dies alle Punkte auf den Winkelhalbierenden.)

iii) Es gilt $|z| \in [0, \infty)$, also folgt $\left|e^{i|z|}\right| = 1$ und $\arg e^{i|z|} = |z| - 2k\pi$ mit einem geeignetem $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ein Vergleich der Polardarstellung beider Seiten der Gleichung $e^{i|z|} = -1$ liefert somit $|z| - 2k\pi = \pi$. Das ist gleichbedeutend mit $|z| = (2k+1)\pi$.
Die Menge der Lösungen der Gleichung $e^{i|z|} = 1$ ist also
$\{ z \in \mathbb{C} : |z| = (2k+1)\pi, \text{ wobei } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$.
(In der komplexen Ebene ist dies die Vereinigung aller Kreislinien um 0 mit den Radien $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

iv) Für alle $\xi \in \mathbb{C}$ gilt $e^\xi \neq 0$. Die Gleichung $e^{z^2-3z+5} = 0$ hat also keine Lösungen.

Aufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir betrachten die Gleichung $z^n - 1 = 0$ bzw. $z^n = 1$. Nach Satz 5 aus 6.4 der Vorlesung hat diese Gleichung genau die Lösungen $\cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n}) = e^{2\pi ik/n}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$.

a) $z - 1 = 0$ hat also genau die Lösung e^0.

$z^2 - 1 = 0$ hat also genau die Lösungen e^0 und $e^{\pi i}$.

$z^3 - 1 = 0$ hat also genau die Lösungen e^0, $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ und $e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

$z^4 - 1 = 0$ hat also genau die Lösungen e^0, $e^{\frac{\pi}{2}i}$, $e^{\pi i}$ und $e^{3\frac{\pi}{2}i}$.

b) Gemäß dem Fundemantalsatz der Algebra hat das Polynom $z^n - 1$ Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten). Andererseits haben wir gesehen, dass die n (verschiedenen!) Zahlen $e^{2\pi i\cdot 0/n}, e^{2\pi i\cdot 1/n}, e^{2\pi i\cdot 2/n}, \dots, e^{2\pi i\cdot(n-1)/n}$ Nullstellen von $z^n - 1$ sind. Daraus folgt, dass die Linearfaktorzerlegung von $z^n - 1$ gegeben ist durch

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - e^{2\pi ik/n}).$$

Aufgabe 5

Definitionsgemäß gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

Sei $x \in [0, 2]$ fest. Für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ setzen wir $a_k := \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
Wir möchten das Leibnizkriterium (Satz 9 a) in 7.7) anwenden und zeigen dazu, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ eine monoton fallend Nullfolge ist.
Schritt 1: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ist monoton fallend:
Es gilt

$$a_{k+1} \leqslant a_k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \leqslant \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant (2k+3)(2k+2)\,.$$

Wegen $x^2 \leqslant 4$ und $6 \leqslant (2k+3)(2k+2)$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist die letzte Ungleichung erfüllt.
Schritt 2: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ist eine Nullfolge:

$$0 \leqslant a_k = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\dots\cdot\frac{2}{2k}\cdot\frac{2}{2k+1} \leq 2\cdot 1\cdot 1\cdot\dots\cdot 1\cdot\frac{2}{2k+1} = \frac{4}{2k+1}.$$

Wegen $0 \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\frac{4}{2k+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt damit aus dem Sandwich-Theorem $a_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Schritt 3:
Das Leibnizkriterium liefert nun

$$s_{2n+1} \leqslant \sin(x) \leqslant s_{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,$$

wobei $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ die n-te Partialsumme bezeichne. Für $n = 0$ ergibt sich

$$x - \frac{x^3}{6} = s_1 \leqslant \sin(x) \leqslant s_0 = x\,.$$

Aufgabe 6

a) Wir setzen $p := 0$; dann gilt $f(p) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Es ist zu zeigen: Es gibt $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - p| < \delta$ gilt. Wir wählen $\delta := \varepsilon > 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - p| < \delta$ $|f(x) - f(p)| = |f(x)| = \left\{\begin{array}{ll} |x| & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{array}\right\} \leq |x| = |x - p| < \delta = \varepsilon$. Das war zu zeigen.

b) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$. Wir wissen bereits, dass es dann eine Folge rationaler Zahlen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und auch eine Folge irrationaler Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ gibt. Aus der Definition von f folgt dann aber $f(q_n) = q_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und $f(x_n) = 0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wäre f in x stetig, so würde aus Satz 1 aus 10.1 in dieser Situation $x = f(x) = 0$ folgen. Das ist ein Widerspruch zu $x \neq 0$, also ist f nicht stetig in x.

Aufgabe 7 (P)

Es gilt nur dann $f_n(x) \neq 0$, wenn

$$n - n^2|x - \tfrac{1}{n}| > 0 \quad\Leftrightarrow\quad |x - \tfrac{1}{n}| < \tfrac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad -\tfrac{1}{n} < x - \tfrac{1}{n} < \tfrac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad 0 < x < \tfrac{2}{n}.$$

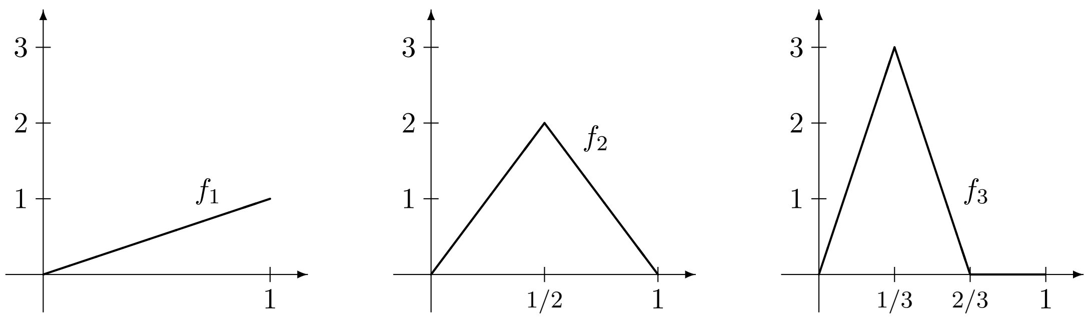
Für $0 < x \leqslant \frac{1}{n}$ gilt

$$f(x) = n - n^2(\tfrac{1}{n} - x) = n^2 x,$$

und für $\frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}$ ergibt sich

$$f(x) = n - n^2(x - \tfrac{1}{n}) = 2n - n^2 x.$$

Wir erhalten die folgenden Schaubilder:



(Man beachte, dass der Maßstab auf x- und y-Achse unterschiedlich gewählt ist und dass zum Schaubild von f_3 auch der Abschnitt der x-Achse zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 gehört.)
Berechnen wir noch die Grenzwerte:
Oben haben wir schon festgestellt, dass $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich haben wir trivialerweise $f_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Oben hatten wir auch gesehen, dass $f_n(x) = 0$ für alle $x \geqslant \frac{2}{n}$ gilt. Für jedes $x \in (0,1]$ gilt daher: Ist $n \geqslant \frac{2}{x}$, so folgt $f_n(x) = 0$. Die Folge $(f_n(x))$ ist also ab einem gewissen Index konstant 0. Dies liefert $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $x \in (0,1]$, insbesondere also für die beiden gegebenen Werte $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{100}$.
Beim letzten Grenzwert ist auch das Argument von n abhängig; hier ergibt sich

$$f_n(\tfrac{1}{n}) = \max\{n - n^2|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n}|, 0\} = \max\{n, 0\} = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \qquad (*)$$

Wir haben nachgerechnet, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für jedes $x \in [0,1]$ gilt. Daher konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ punktweise gegen die Nullfunktion.
Allerdings liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Gemäß Definition konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen die Nullfunktion, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ \forall x \in [0,1]: \quad |f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Negation liefert die Bedingung, dass die Funktionenfolge (f_n) nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen die Nullfunktion konvergiert:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0\ \exists x \in [0,1]: \quad |f_n(x)| \geqslant \varepsilon.$$

Aufgrund von $(*)$ ist diese Bedingung erfüllt (wähle z.B. $\varepsilon = 1/2$, $n = n_0$, $x = 1/n_0$), d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist ein eindrucksvolles Beispiel dafür, dass bei einer (punktweise) konvergenten Folge stetiger Funktionen f_n aus der Stetigkeit der Grenzfunktion im allgemeinen **nicht** die Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt.

Aufgabe 8 (P)

Da die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig gegen f konvergiert, finden wir zu $\varepsilon = 1$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < 1$ für alle $x \in D$. Da f_n beschränkt ist, finden wir $M \in \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \leqslant M$ für alle $x \in D$. Dann gilt für jedes $x \in D$

$$|f(x)| = |f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant M + 1.$$

Also ist f beschränkt.