

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
 Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

- a) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8}$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 6}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x + 2}{x^3 - x^2 + 3x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 11x^3 + 34x^2 - 36x + 8}{3x^4 - 16x^3 + 29x^2 - 20x + 4}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{3 - x}$ g)¹ $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{2x}{3 - x}$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x}$
- i) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9}$ j) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$ k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + x} - 2}{x}$
- l) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$ m) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} (\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x})$

Aufgabe 2

Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) $f(x) := \begin{cases} |x| & \text{für } x \in (-\infty, 1] \\ \sqrt{x - 1} + a & \text{für } x \in (1, \infty) \end{cases}$ b) $f(x) := \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{für } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{für } x > 1 \end{cases}$
- c) $f(x) := \begin{cases} \min\{x^2 + 2x - 15, x^3\} & \text{für } x \in (-\infty, -5] \cup [-1, \infty) \\ x + a & \text{für } x \in (-5, -1) \end{cases}$
- d) $f(x) := \begin{cases} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 4x + 3} & \text{für } x \notin \{1, 3\} \\ 1 & \text{für } x = 1 \\ a & \text{für } x = 3 \end{cases}$ e) $f(x) := \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Aufgabe 3

- a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) := 3x - 2\cos^2 x$ eine Nullstelle auf dem Intervall $[0, 1]$ hat.
- b) Zeigen Sie: Ist eine Funktion $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig, so gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $g(x) = x$.

¹Mit $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)$ ist der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x)$ gemeint.

Aufgabe 4

Die Umkehrfunktion $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der *reellen* Exponentialfunktion $\exp$ nennt man (*den natürlichen*) *Logarithmus*.

- a) (*Zur Wohldefiniertheit*) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion die reelle Achse auf $(0, \infty)$ abbildet und dass $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ bijektiv ist.
- b) Bestimmen Sie $\ln(1)$ und $\ln(e)$.
- c) Weisen Sie die folgenden Eigenschaften nach, indem Sie sie auf die entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion zurückführen.
 - (i) $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.
 - (ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ und $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$ für alle $x, y \in (0, \infty)$.
 - (iii) $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$ und $r \in \mathbb{Q}$.
 - (iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty$.
 - (v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} \ln(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0+} x^k \ln(x) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.
 - (vi) $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2}$ für alle $x, y \in (0, \infty)$.
 - (vii) $\ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ mit $x \neq 1$.

Aufgabe 5 (P)

Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen bzw. Funktionenreihen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

- a) $f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx}$ auf $I_1 = [0, \infty)$ bzw. auf $I_2 = [a, \infty)$ mit einem $a > 0$
- b) $f_n(x) = (1 - x)^n$ auf $I_1 = [0, 1]$ bzw. auf $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$
- c) $f_n(x) = nx(1 - x)^n$ auf $I = [0, 1]$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x)$ auf $I = (-1, 1]$
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ auf $I = \mathbb{R}$

Aufgabe 6 (P)

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Für jedes $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j| \quad \text{und} \quad \|x\|_{\infty} := \max_{j=1, \dots, n} |x_j|.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_{\infty}$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind.