KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Zähler und Nenner haben 8 als Nullstelle; für $x \neq 8$ gilt $\dfrac{x^2-64}{x-8} = \dfrac{(x-8)(x+8)}{x-8} = x+8$. Folglich existiert der gesuchte Grenzwert und es gilt

$$\lim_{x\to 8} \frac{x^2-64}{x-8} = \lim_{x\to 8} x+8 = 16.$$

b) Zähler und Nenner haben -1 als Nullstelle; Polynomdivision liefert

$$x^2+5x+4 = (x+1)(x+4) \quad \text{und} \quad x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)\,.$$

Folglich existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+5x+4}{x^3+x^2+x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+4}{x^2+1} = \frac{-1+4}{(-1)^2+1} = \frac{3}{2}\,.$$

c) Dieser Grenzwert existiert nicht. Der Zähler des Bruchs hat in $x=3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $(x^2-x)/(x+2) \to 6/5$ für $x \to 3$ gilt

$$\frac{x^2-x}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x^2-x}{x+2} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } x \to 3+\,, \\ -\infty & \text{für } x \to 3-\,. \end{cases}$$

(*Bemerkung:* Dass $\lim_{x\to 3+} \frac{1}{x-3} = \infty$ und $\lim_{x\to 3-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ gilt, folgt direkt aus folgendem Ergebnis für Folgen: Ist (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ (bzw. $a_n > 0$) für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt offenbar $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ (bzw. $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$).)

d) Hier hat der Nenner in $x=2$ keine Nullstelle, daher gilt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+7x+2}{x^3-x^2+3x} = \frac{2^2+7\cdot 2+2}{2^3-2^2+3\cdot 2} = \frac{20}{10} = 2\,.$$

e) Zähler und Nenner haben 2 als Nullstelle; Polynomdivision liefert

$$x^4-11x^3+34x^2-36x+8 = (x-2)(x^3-9x^2+16x-4) \text{ und}$$

$$3x^4-16x^3+29x^2-20x+4 = (x-2)(3x^3-10x^2+9x-2).$$

Die beiden Polynome $x^3-9x^2+16x-4$ und $3x^3-10x^2+9x-2$ haben ebenfalls 2 als Nullstelle; eine weitere Polynomdivision liefert

$$x^3-9x^2+16x-4 = (x-2)(x^2-7x+2) \text{ und}$$

$$3x^3-10x^2+9x-2 = (x-2)(3x^2-4x+1).$$

Sofern die Ausdrücke definiert sind, gilt also

$$\frac{x^4-11x^3+34x^2-36x+8}{3x^4-16x^3+29x^2-20x+4} = \frac{(x-2)^2(x^2-7x+2)}{(x-2)^2(3x^2-4x+1)} = \frac{x^2-7x+2}{3x^2-4x+1}.$$

Weiter ist 2 keine Nullstelle von $3x^2 - 4x + 1$.

Wir schließen, dass der gesuchte Grenzwert exisitiert und dass gilt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 11x^3 + 34x^2 - 36x + 8}{3x^4 - 16x^3 + 29x^2 - 20x + 4} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2 - 7x + 2)}{\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x + 1)} = \frac{-8}{5} = -\frac{8}{5}.$$

f) Dieser Grenzwert existiert nicht. Der Zähler des Bruchs hat in $x = 3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $2x \to 6$ für $x \to 3$ gilt (siehe Bemerkung zu c))

$$\frac{2x}{3-x} = \frac{1}{x-3} \cdot 2x \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{für } x \to 3+\,, \\ +\infty & \text{für } x \to 3-\,. \end{cases}$$

g) Dieser Grenzwert existiert und es gilt $\lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{2x}{3-x} = -\infty$ (siehe f)).

h) Mit dem gleichen Standardtrick wie bei Folgen erhalten wir, dass dieser Grenzwert existiert und dass gilt

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{8 + 2x^{-1} + x^{-3}}{2 + 7x^{-2}} = \frac{8 + 0 + 0}{2 + 0} = 4\,.$$

i) Es gilt

$$\lim_{x\to 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9} = \lim_{x\to 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x\to 9} \frac{-1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{-1}{\sqrt{9} + 3} = -\frac{1}{6}\,,$$

dieser Grenzwert existiert also.

j) Zunächst formen wir die Folgenglieder zu *einem* Bruch von Polynomen um, um analog zu den Aufgabenteilen a) bis e) vorgehen zu können. Wegen $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ (das erhält man mit Hilfe der geometrischen Summenformel oder der Polynomdivision $(1-x^3) : (1-x)$) ist der Hauptnenner $(1-x)(1+x+x^2)$. Es gilt

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(1+x+x^2) - 3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{x^2 + x - 2}{(1-x)(1+x+x^2)}\,,$$

und zwar für alle solche $x \in \mathbb{R}$, für die die linke Seite definiert ist.

Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite haben 1 als Nullstelle; Polynomdivision (oder direktes Bestimmen der Nullstellen) liefert

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)\,.$$

Folglich existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{1+2}{1+1+1^2} = -1\,.$$

k) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2 = \sqrt[3]{8}$, so ergibt sich mit der Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (die man analog zu j) wieder mittels geometrischer Summenformel oder Polynomdivision gewinnt) die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = a - b = \frac{(\sqrt[3]{8+x}\,)^3 - 8}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4}\,.$$

Folglich hat man

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{12}\,.$$

l) Für alle $x \geqslant 0$ gilt

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}\,)^2 - (\sqrt{x}\,)^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\,,$$

vergleiche mit dem enstprechenden Standardtrick bei Folgen.

Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0\,,$$

insbesondere exisitiert der gesuchte Grenzwert also.

m) Für alle $x \geqslant 1$ gilt

$$\sqrt{x\pm1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x\pm1}\,)^2 - (\sqrt{x}\,)^2}{\sqrt{x\pm1} + \sqrt{x}} = \frac{\pm1}{\sqrt{x\pm1} + \sqrt{x}}\,,$$

vergleiche mit l).

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} &= \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) + \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x} - (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,)} = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,)} \\
&= \frac{(x-1) - (x+1)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\,)} \\
&= \frac{-2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\,)}\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\,)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2(\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}(\sqrt{1+1/x} + 1\,)\,\sqrt{x}(\sqrt{1-1/x} + 1\,)\,\sqrt{x}(\sqrt{1-1/x} + \sqrt{1+1/x}\,)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+1/x} + 1\right)\left(\sqrt{1-1/x} + 1\right)\left(\sqrt{1-1/x} + \sqrt{1+1/x}\,\right)} \\
&= \frac{-2}{2\cdot2\cdot2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

insbesondere exisitiert der gesuchte Grenzwert also.

Aufgabe 2

a) Bekanntlich sind $x \mapsto |x|$ und $x \mapsto \sqrt{x-1} + a$ (als Komposition stetiger Funktionen) stetig auf $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig ist. Im Punkt 1 ist f genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x\to1-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to1+} f(x)$$

gilt. Aus der Definition erhalten wir

$$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} |x| = 1,$$

$$f(1) = 1 \text{ und}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \sqrt{x-1} + a = a.$$

f ist im Punkt 1 also genau dann stetig, wenn $a = 1$ gilt.

Fazit: Falls $a = 1$ gilt, ist f auf $\mathbb{R}$ stetig; andernfalls nur auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Bekanntlich sind $x \mapsto 2x^2 + ax$ und $x \mapsto 2 - x$ stetig auf $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig ist. Im Punkt 1 ist f genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1+} f(x)$$

gilt. Aus der Definition erhalten wir

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} 2x^2 + ax = 2 + a,$$

$$f(1) = 2 + a \text{ und}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} 2 - x = 1.$$

f ist im Punkt 1 also genau dann stetig, wenn $2 + a = 1$ gilt; also genau dann, wenn $a = -1$ gilt.

Fazit: Falls $a = -1$ gilt, ist f auf $\mathbb{R}$ stetig; andernfalls nur auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c) Wir machen uns zunächst klar, dass für alle *stetigen* Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch die Minimumsfunktion $\min\{g, h\}$ (d. h. die Funktion $x \mapsto \min\{g(x), h(x)\}$) stetig ist.

Dazu bemerken wir, dass für alle Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ gilt: $\min\{s, t\} = \frac{s+t-|s-t|}{2}$:
Ist nämlich $s < t$, dann gilt $\frac{s+t-|s-t|}{2} = \frac{s+t-(-(s-t))}{2} = \frac{2s}{2} = s = \min\{s, t\}$.
Ist andernfalls $s \geq t$, dann gilt $\frac{s+t-|s-t|}{2} = \frac{s+t-(s-t)}{2} = \frac{2t}{2} = t = \min\{s, t\}$.

Daraus folgt direkt, dass $\min\{g, h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ gilt; also ist $\min\{g, h\}$ als Komposition stetiger Funktionen selbst auch stetig.

Daraus folgt, dass f in jedem Punkt $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$ stetig ist. Außerdem ist f offenbar in jedem Punkt $x \in (-5, -1)$ stetig. Wir halten fest, dass f also zumindest auf $\mathbb{R} \setminus \{-5, -1\}$ stetig ist.

Im Punkt -5 ist f genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x\to -5-} f(x) = f(-5) = \lim_{x\to -5+} f(x)$$

gilt. Für die Polynome $p(x) := x^2 + 2x - 15$ und $q(x) := x^3$ gilt $p(-5) = 0$ und $q(-5) = -125$. Aus Stetigkeitsgründen gilt somit $p(x) > q(x)$ für alle $x \in [-5 - \delta, -5]$ mit einem geeignetem $\delta > 0$. Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to -5-} f(x) = \lim_{x\to -5-} \min\{x^2 + 2x - 15,\ x^3\} = \lim_{x\to -5-} x^3 = -125.$$

Weiter gilt

$$f(-5) = \min\{0, -125\} = -125 \text{ und}$$

$$\lim_{x\to -5+} f(x) = \lim_{x\to -5+} x + a = a - 5.$$

f ist im Punkt -5 also genau dann stetig, wenn $a - 5 = -125$ gilt; also genau dann, wenn $a = -120$ gilt.

Im Punkt -1 ist f genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = f(-1) = \lim_{x\to -1+} f(x)$$

gilt. Es gilt

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} x + a = a - 1 \text{ und}$$

$$f(-1) = \min\{-16, -1\} = -16.$$

Weiter gilt $p(-1) = -16$ und $q(-1) = -1$, wobei p und q wie oben definiert sind. Aus Stetigkeitsgründen gilt somit $p(x) < q(x)$ für alle $x \in [-1, -1+\delta]$ mit einem geeignetem $\delta > 0$. Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \min\{x^2 + 2x - 15,\, x^3\} = \lim_{x\to -1+} x^2 + 2x - 15 = -16.$$

f ist im Punkt -1 also genau dann stetig, wenn $a - 1 = -16$ gilt; also genau dann, wenn $a = -15$ gilt.

Fazit:
Falls $a = -120$ gilt, dann ist f genau auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ stetig.
Falls $a = -15$ gilt, dann ist f genau auf $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ stetig.
In allen anderen Fällen ist f genau auf $\mathbb{R} \setminus \{-5, -1\}$ stetig.

d) Die Funktion $x \mapsto \frac{2x^2-6x+4}{x^2-4x+3}$ ist als Komposition stetiger Funktionen überall dort stetig, wo sie definiert ist, d.h. außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners. Wegen $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ verschwindet der Nenner für $x = 1$ oder $x = 3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ stetig ist.

Weiter gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-2)}{(x-3)} = 1 = f(1).$$

Also ist f im Punkt 1 stetig.

Der Grenzwert $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2x^2-6x+4}{x^2-4x+3}$ existiert nicht: Der Zähler des Bruchs hat in $x = 3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $\frac{2x^2-6x+4}{x-1} \to 2$ für $x \to 3$ gilt (siehe Bemerkung zu Aufgabe 1 c))

$$\frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{x-3} \cdot \frac{2x^2 - 6x + 4}{x-1} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } x \to 3+\,, \\ -\infty & \text{für } x \to 3-\,, \end{cases}$$

Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist).

Fazit: Unabhängig vom Wert von a ist f genau auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ stetig.

e) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Im Punkt 0 ist f genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x)$$

gilt.

Wir zeigen nun, daß der Grenzwert $\lim_{x\to 0+} f(x)$ nicht exisitiert. Dazu betrachten wir die beiden durch $x_n := \frac{1}{n\pi}$ und $\widetilde{x}_n := \frac{1}{\pi/2+2n\pi}$ definierten Folgen (x_n) und $(\widetilde{x}_n)$. Offenbar gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = 0$. Weiter gilt außerdem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n) = 1$. Würde der Grenzwert $\lim_{x\to 0+} f(x)$ exisitieren, müßte aber insbesondere $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n)$ gelten. Also exisitiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0+} f(x)$ nicht.

Wir haben also gesehen, dass, unabhängig von a, die Gleichung

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x)$$

nie erfüllt ist.

Also ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig, im Punkt 0 hingegen nicht.

Bemerkungen:
1. Analog läßt sich auch zeigen, daß $\lim_{x\to 0-} f(x)$ nicht exisitiert (dies war für die Lösung aber nicht nötig).
2. Wir haben im Beweis insbesondere gezeigt, daß die Funktion $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ nicht stetig nach 0 fortsetzbar ist.

Aufgabe 3

a) Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Außerdem gilt $f(0) = 3\cdot 0 - 2\cos^2 0 = -2 < 0$ und $f(1) = 3\cdot 1 - 2\cos^2 1$. Wegen $|\cos 1| \leq 1$ gilt $\cos^2 1 \leq 1$ und somit $-2\cos^2 1 \geq -2$. Wir erhalten $f(1) \geq 3-2 = 1 > 0$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es $x \in (0,1)$ mit $f(x) = 0$ gibt. Also hat f eine Nullstelle auf $[0,1]$.

b) Wir definieren die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wegen $g([a,b]) \subset [a,b]$ gilt $h(a) = a - g(a) \leqslant a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geqslant b - b = 0$. Daher liegt $y_0 := 0$ zwischen den Funktionswerten $h(a)$ und $h(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es (mind.) ein $x \in [a,b]$ mit $h(x) = 0$, d.h. $g(x) = x$. (Solch ein x heißt *Fixpunkt* von g.)

Bemerkung: Die Aussage ist i.a. falsch, wenn man $[a,b]$ durch das offene Intervall (a,b) ersetzt. Beispielsweise besitzt die Funktion $g\colon (0,1) \to (0,1)$, $g(x) := \frac{1}{2}x$, in $(0,1)$ keinen Fixpunkt, denn aus $g(x) = x$ folgt $x = 0 \notin (0,1)$.

Aufgabe 4

a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass exp stetig ist, und dass $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ gilt. Weiter wissen wir, dass exp keine Nullstellen hat. Und schließlich ist bekannt, dass exp im Reellen streng wachsend ist.

Wir bestimmen nun das Bild $\exp(\mathbb{R})$ der exp-Funktion.

1. Es gilt $\exp(\mathbb{R}) \subset (0,\infty)$: Angenommen, es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) \leq 0$. Je nach Vorzeichen von x ist $[0,x]$ oder $[x,0]$ ein Intervall und wegen $\exp(0) = 1 > 0$ hat dann exp nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstellen auf diesem Intervall. Das ist ein Widerspruch zur Nullstellenfreiheit, also gilt tatsächlich $\exp(\mathbb{R}) \subset (0,\infty)$.

2. Es gilt $\exp(\mathbb{R}) \supset (0,\infty)$: Sei $y \in (0,\infty)$. Wegen $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ gibt es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ und $\exp(x_1) < y < \exp(x_2)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann auch $x \in (x_1, x_2)$ mit $y = \exp(x) \in \exp(\mathbb{R})$. Also gilt $\exp(\mathbb{R}) \supset (0,\infty)$.

Nach Definition ist $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ damit surjektiv. Außerdem ist $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ aufgrund der strengen Monotonie injektiv. Also haben wir auch die geforderte Bijektivität gezeigt.

Bemerkung: Damit haben wir gezeigt, dass $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ tatsächlich eine Umkehrfunktion besitzt; die Definition in der Einleitung der Aufgabe ergab also Sinn.

b) Aus $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$ folgt direkt $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.

c) **(i)** Das folgt aus Satz 10.4.6 (wir müssen lediglich ein geeignetes abgeschlossenes Intervall angeben). Seien $x, \tilde{x} \in (0,\infty)$ mit $x < \tilde{x}$. Es gibt dann $s, t \in (0,\infty)$ mit $s < x < \tilde{x} < t$. Wir setzen $a := \ln s$ und $b := \ln t$. Dann ist $[a,b]$ oder $[b,a]$ ein Intervall und Satz 10.4.6 auf dieses Intervall angewendet liefert $\ln x < \ln \tilde{x}$ sowie die Stetigkeit von ln im Punkt x. Weil $x, \tilde{x}$ (abgesehen von ihrer Anordnung) beliebig waren, folgt daraus die Behauptung.

(ii) Für beliebige $x, y \in (0,\infty)$ gilt nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln(x))\exp(\ln(y)) =$$
$$\exp(\ln(x) + \ln(y)),$$
$$\exp(\ln(x/y)) = x/y = \exp(\ln(x))(\exp(\ln(y)))^{-1} =$$

$$\exp(\ln(x))\exp(-\ln(y)) = \exp(\ln(x) - \ln(y)).$$

Wegen der Injektivität von exp ergibt sich

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \text{ und } \ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y).$$

(iii) Wir verwenden

$$\exp(ry) = (\exp(y))^r \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Sind $r \in \mathbb{Q}$ und $x \in (0,\infty)$, dann gilt

$$\exp(\ln(x^r)) = x^r = (\exp(\ln(x))^r \overset{(1)}{=} \exp(r\ln(x)),$$

woraus $\ln(x^r) = r\ln(x)$ wegen der Injektivität von exp folgt.

Es verbleibt, (1) zu begründen: Sei dazu $y \in \mathbb{R}$ und $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Es gilt dann

$$\big(\exp(y)\big)^p \overset{(*)}{=} \exp(py) = \exp\big(q \cdot \frac{py}{q}\big) \overset{(*)}{=} \big(\exp\big(\frac{py}{q}\big)\big)^q,$$

wobei wir bei $(*)$ Folgerung 9.1.2 verwendet haben. Daraus folgt

$$\big(\exp(y)\big)^{p/q} = \exp\big(\frac{p}{q}\cdot y\big), \text{ also } \big(\exp(y)\big)^r = \exp(r\cdot y).$$

(iv) Sei $K \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Da ln streng monoton wachsend ist, gilt $\ln(x) > K$ für alle $x > \exp(K)$. Also ist $\lim_{x\to\infty}\ln(x) = \infty$. Daraus folgt

$$\lim_{x\to 0+}\ln(x) = \lim_{y\to\infty}\ln(1/y) = \lim_{y\to\infty}\big(\ln(1) - \ln(y)\big) = -\lim_{y\to\infty}\ln(y) = -\infty.$$

(v) Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Für die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n := k\ln(x_n)$ gilt nach iv) dann ebenfalls $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Wegen $x_n^k = \exp(y_n)$ erhalten wir mit Hilfe von Satz 3 in 9.2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x_n)}{x_n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}\,y_n\exp(-y_n) = 0.$$

Also ist $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^k} = 0$. Hiermit ergibt sich

$$\lim_{x\to 0+} x^k\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{-\ln(1/x)}{(1/x)^k} = -\lim_{y\to\infty}\frac{\ln(y)}{y^k} = 0.$$

(vi) Seien $x, y \in (0,\infty)$ beliebig. Wegen der strengen Monotonie der exp-Funktion gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln\frac{x+y}{2} \iff\\
&\exp\Big(\frac{\ln x + \ln y}{2}\Big) \leqslant \exp\big(\ln\frac{x+y}{2}\big) \iff\\
&\Big(\exp(\ln x)\cdot\exp(\ln y)\Big)^{1/2} \leqslant \frac{x+y}{2} \iff\\
&\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist stets wahr, siehe Satz 4.3.4 (GAM-Ungleichung).

(vii) Sei $x \in (0,\infty)$ beliebig. Wegen der strengen Monotonie der exp-Funktion gilt

$$\ln x < x - 1 \iff x < \exp(x-1) \iff \exp(x-1) - x > 0.$$

Wir zeigen nun die letzte Ungleichung.
Nach Defintion gilt

$$\exp(x-1)-x=-x+\exp(x-1)=-x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=$$

$$-x+1+(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}.$$

Es bleibt also $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}>0$ zu zeigen.
Für $x>1$ ist dies klar, da jedes Reihenglied positiv ist.
Sei also $x<1$. Wir bemerken, dass gemäß Satz 8.2.4

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=$$

$$\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{(x-1)^4}{4!}+\frac{(x-1)^5}{5!}+\frac{(x-1)^6}{6!}+\frac{(x-1)^7}{7!}+\cdots=$$

$$\left(\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}\right)+\left(\frac{(x-1)^4}{4!}+\frac{(x-1)^5}{5!}\right)+\left(\frac{(x-1)^6}{6!}+\frac{(x-1)^7}{7!}\right)+\ldots \text{ gilt.}$$

Wegen $0<x<1$ ist $|x-1|<1$, also gilt für jedes *gerade* $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{(x-1)^n}{n!}+\frac{(x-1)^{n+1}}{(n-1)!}>0.$$

Daraus folgt schließlich, dass die zuletzt betrachtete (geklammerte) Reihe ebenfalls nur aus positiven Reihengliedern besteht, also ihr Reihenwert positiv ist.

Aufgabe 5 (P)

a) Es gilt $f_n(0)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, also $f_n(0)\xrightarrow{n\to\infty}0$. Für ein fest vorgegebenes $x>0$ gilt

$$f_n(x)=\frac{x+nx^2+nx}{1+nx}=\frac{x/n+x^2+x}{1/n+x}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{x^2+x}{x}=x+1\,.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$$

Auf $[0,\infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da die Funktion f in 0 unstetig ist, alle f_n aber stetig sind. (Wäre die Konvergenz gleichmäßig, so würde sich die Stetigkeit der f_n auf die Grenzfunktion f übertragen.)

Auf $[a,\infty)$ mit einem $a>0$ liegt dagegen gleichmäßige Konvergenz vor. Für jedes $x\in[a,\infty)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=\left|\frac{x+nx^2+nx}{1+nx}-(x+1)\right|=\left|\frac{x+nx^2+nx-(x+1)(1+nx)}{1+nx}\right|\\&=\left|\frac{x+nx^2+nx-x-nx^2-1-nx}{1+nx}\right|=\left|\frac{-1}{1+nx}\right|\leqslant\frac{1}{1+na}=:c_n\xrightarrow{n\to\infty}0\,.\end{aligned}$$

Deshalb existiert zu jedem $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{1+na}\leqslant\varepsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geqslant N$ gilt; für jedes $n\geqslant N$ ist dann also $\sup\{|f_n(x)-f(x)|:x\in[a,\infty)\}\leqslant\varepsilon$, d.h. (f_n) konvergiert auf $[a,\infty)$ gleichmäßig gegen f.

Allgemein gilt: Sei $D\neq\emptyset$ und $f,f_n:D\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, Funktionen. Gilt $|f_n(x)-f(x)|\leqslant c_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $x\in D$ und ist $(c_n)\subset\mathbb{R}$ eine (von x unabhängige!) Nullfolge, dann konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f.

b) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0,1]$, so folgt $|1-x| < 1$ und damit

$$f_n(x) = (1-x)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Auf $[0,1]$ ist diese Funktion unstetig, im Gegensatz zu den Funktionen f_n; also kann die Konvergenz auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig sein.

Auf $[\frac{1}{2}, 1]$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor: Für alle $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ gilt wegen $|1-x| \leqslant \frac{1}{2}$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |(1-x)^n| = |1-x|^n \leqslant 2^{-n}\,,$$

und wie zuvor bedeutet dies gleichmäßige Konvergenz.

Bemerkung: Auf dem Intervall $(0,1]$ ist die Konvergenz jedoch nicht gleichmäßig, denn es gilt $\sup\{\,|f_n(x) - f(x)| : x \in (0,1]\,\} = \sup\{\,|1-x|^n : x \in (0,1]\,\} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Offenbar gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0,1]$ ist $q := 1 - x \in [0,1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

(Wegen $\sqrt[n]{nq^n} \to q < 1$ für $n \to \infty$ konvergiert die Reihe über nq^n, was dann $nq^n \to 0$ für $n \to \infty$ impliziert.) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Obwohl diese Grenzfunktion stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Es gilt

$$f_n(\tfrac{1}{n}) = n \cdot \tfrac{1}{n} \cdot (1 - \tfrac{1}{n})^n = (1 - \tfrac{1}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}$$

(vgl. Aufgabe 2, 6. Übungsblatt). Dies bedeutet aber, dass $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\}$ nicht gegen 0 konvergiert, z.B. ist $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \sup\{|f_n(x)| : x \in [0,1]\} \geqslant \frac{1}{2}e^{-1}$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Das schließt die gleichmäßige Konvergenz aus.

d) Setzt man $x = 1$ in $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1-x)x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x(1-x)\cdot\frac{1}{1-x} = x\,.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

Da diese Funktion, im Gegensatz zu den Partialsummenfunktionen $s_N : (-1,1] \to \mathbb{R}$, die durch $s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} x^n(1-x)$ gegeben sind, nicht stetig in $x = 1$ ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Bemerkung: Auch auf dem Intervall $(-1,1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x \in (-1,1)$ gilt

$$\Big|s_N(x) - f(x)\Big| = \Big|(1-x)x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - x\Big| = \Big|(1-x)x\frac{1-x^N}{1-x} - x\Big| = |-x^{N+1}| = |x|^{N+1}$$

sowie

$$|x|^{N+1} \geqslant \frac{1}{2} \qquad\Longleftrightarrow\qquad |x| \geqslant \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}\,.$$

Obige Rechnung zeigt: Ist $\varepsilon := \frac{1}{2}$ gesetzt, dann finden wir zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $x \in (-1,1)$ (etwa $x = \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}$) so, dass $|s_N(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ gilt. Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.

e) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| = \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt nach Satz 3 (9. Ergänzung): Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ konvergiert gleichmäßig und damit auch punktweise auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (P)

Um nachzuweisen, dass die Abbildung $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, müssen wir zeigen, dass für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(N1) $\|x\|_1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ (Definitheit);

(N2) $\|\lambda x\|_1 = |\lambda|\,\|x\|_1$ (Homogenität);

(N3) $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ (Dreiecksungleichung).

Zu (N1): Es gelte $\|x\|_1 = 0$. Also gilt $\sum_{j=1}^{n}|x_j| = 0$. Ein Summe nicht-negativer Zahlen kann aber nur 0 ergeben, wenn jeder Summand 0 ist. Also folgt $|x_j| = 0$ für jedes $j = 1, \ldots, n$. Daraus folgt sofort aufgrund der Definition des Betrags $x_j = 0$ für jedes $j = 1, \ldots, n$. Das bedeutet $x = (0, 0, \ldots, 0) = 0$.
Zu (N2): Es gilt

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^{n}|\lambda x_j| = \sum_{j=1}^{n}|\lambda| \cdot |x_j| = |\lambda| \cdot \sum_{j=1}^{n}|x_j| = |\lambda| \cdot \|x\|_1.$$

Zu (N3): Es gilt

$$\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j| \leq \sum_{j=1}^{n}\big(|x_j|+|y_j|\big) = \sum_{j=1}^{n}|x_j| + \sum_{j=1}^{n}|y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Also ist $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.
Analog gehen wir für $\|\cdot\|_\infty$ vor, wobei wir in (N1) bis (N3) natürlich $\|\cdot\|_1$ durch $\|\cdot\|_\infty$ ersetzen.
Zu (N1): Es gelte $\|x\|_\infty = 0$. Also gilt $\max\limits_{j=1,\ldots,n}|x_j| = 0$. Für jedes $j = 1, \ldots, n$ folgt daraus einerseits $|x_j| \leq 0$, aufgrund der Definition des Betrags gilt andererseits $|x_j| \geq 0$. Also folgt $|x_j| = 0$ für jedes $j = 1, \ldots, n$. Wie bei der $\|\cdot\|_1$-Norm folgt daraus $x = (0, 0, \ldots, 0) = 0$.
Zu (N2): Es gilt

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n}|\lambda x_j| = \max_{j=1,\ldots,n}\big(|\lambda| \cdot |x_j|\big) = |\lambda| \cdot \max_{j=1,\ldots,n}|x_j| = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty.$$

Zu (N3): Es gilt

$$\|x+y\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n}|x_j+y_j| \leq \max_{j=1,\ldots,n}\big(|x_j|+|y_j|\big) \leq \max_{j=1,\ldots,n}|x_j| + \max_{j=1,\ldots,n}|y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Also ist auch $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.