

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{\sin^4 x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)}$.

Hinweis: Potenzreihenentwicklung. Hinweis zu d): $\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(\sin(t^2 - 1))}{\sin(t^2 - 1)}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$; c) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(\tan(e^x))$.

Hinweis: Substitution.

Aufgabe 3

- a) Berechnen Sie alle $x \in (0, \infty)$, die $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ erfüllen.
b) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen.
i) $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}$; ii) $x^{\log_{10} x} = 100x$.
c) Zeigen Sie: $\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2 - \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3})$.

Aufgabe 4

- a) Welche Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$; ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2}$.

- b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der folgenden Funktion jeweils um die Entwicklungsstelle $z_0 = 2$ und geben sie den zugehörigen Konvergenzradius an.

i) $f: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{3}\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1+3z}$; ii) $f: \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1-z}{1-z-2z^2}$.

Hinweis zu b.ii):

Es gibt Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ gilt.

Aufgabe 5

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

- a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} (x-5)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-2i)^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^n} (z+1)^{2n}$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) z^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{\sqrt{n}} x^{3n+1}$ f) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$

Aufgabe 6 (P)

Zeigen Sie:

- a) Für beschränkte reelle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

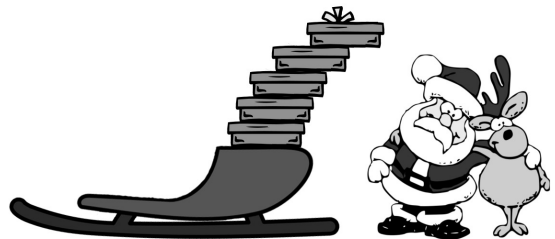
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n).$$

- b) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 0$, dann gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Aufgabe 7 (W)

Der Weihnachtsmann hat fünf Geschenkpakete auf seinen Schlitten gestapelt. Nach rasantem Flug haben sich die Pakete wie im nebenstehenden Bild nach hinten verschoben und sind beinahe vom Schlitten gekippt. Es scheint, als ob sich das oberste Geschenk sogar nicht einmal mehr über der Ladefläche befindet. Der Weihnachtsmann fragt sich, ob das tatsächlich zutreffen kann. Außerdem grübelt er, wie weit er wohl „nach hinten bauen“ könnte, wenn er beliebig viele Geschenke zur Verfügung hätte. Können Sie dem Weihnachtsmann weiterhelfen?



Hinweis: Wir nehmen natürlich an, dass alle Pakete gleichartige, homogene, gleichausgerichtete Quader sind und sich nur in Längsrichtung verschieben. Überlegen Sie sich, wie weit das oberste Paket über das zweitoberste hinausragen darf, wie weit die beiden obersten Paket über das drittoberste hinausragen dürfen, usw. und zeigen Sie anschließend induktiv, wie weit man mit einer festen, aber beliebigen Anzahl an Paketen maximal kommt.

Frohe Weihnachten und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr 2011!