KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad \text{also} \qquad 1 = (x^2 + 2x - 3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n .$$

Nun gilt wegen $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x - 3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n .\end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen hat diese Potenzreihe den Wert 1 genau dann, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$-4a_0 = 1, \qquad -4a_1 = 0, \qquad a_{n-2} - 4a_n = 0 \quad \text{für alle } n \geqslant 2 .$$

Es folgt: $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ und $a_n = \frac{1}{4} a_{n-2}$ für jedes $n \geqslant 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = -(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Bemerkung für Studierende der Physik: Wegen $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = (\frac{1}{4})^{(1+1/k)/2} \xrightarrow{k\to\infty} (\frac{1}{4})^{1/2} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = 0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$.

b) Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{also} \qquad \sinh x = \cosh x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Setzen wir die Potenzreihendarstellungen von $\sinh x$ und $\cosh x$ ein, so bedeutet dies

$$x + \tfrac{1}{3!} x^3 + \cdots = \big(1 + \tfrac{1}{2!} x^2 + \cdots\big)\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\big) .$$

Wir multiplizieren auf der rechten Seite aus; dann haben wir die Gleichung

$$x + \tfrac{1}{3!} x^3 + \cdots = a_0 + a_1 x + (a_2 + \tfrac{1}{2!} a_0) x^2 + (a_3 + \tfrac{1}{2!} a_1) x^3 + \cdots .$$

Somit liefert der Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 + \tfrac{1}{2!} a_0 = 0, \quad a_3 + \tfrac{1}{2!} a_1 = \tfrac{1}{3!} ,$$

also $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ und $a_3 = -\frac{1}{3}$.

Aufgabe 2

a) Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und es existiere ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$.

Sei $\varepsilon := \frac{1}{2} f(x_0)$. Nach Voraussetzung ist $\varepsilon > 0$ und aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für solche x gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$f(x) = f(x_0) - (-f(x) + f(x_0)) \geqslant f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon\,.$$

Setzt man $\alpha := \max\{a, x_0 - \delta\}$ und $\beta := \min\{b, x_0 + \delta\}$, so gilt $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ und $f(x) \geqslant \varepsilon$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Zusammen mit der Abschätzung $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \\ &\geqslant \int_a^\alpha 0\,dx + \int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx + \int_\beta^b 0\,dx = (\beta - \alpha)\varepsilon > 0\,.\end{aligned}$$

b) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geqslant g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$.

Betrachte die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := f(x) - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig, und es gilt $h(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$. Außerdem ist $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$. Somit sind die Voraussetzungen des a)-Teils für die Funktion h erfüllt. Dieser liefert

$$\int_a^b h(x)\,dx > 0\,,$$

woraus aufgrund der Linearität des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

folgt.

Aufgabe 3

a) Wegen $\|Z\| < \frac{1}{2}$ liegen in jedem dem Intervalle $[1,2), [2,3), [3,4), [4,5]$ mindestens zwei Punkte der Zerlegung Z.

Wir bezeichnen die Punkte aus $Z \cap [1,2)$ mit $a_0 := x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \cdots < x_{n_0}^{(0)} =: b_0$, wobei $n_0 \in \mathbb{N}$.

Weiter bezeichnen wir die Punkte aus $Z \cap [2,3)$ mit $a_1 := x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \cdots < x_{n_1}^{(1)} =: b_1$, wobei $n_1 \in \mathbb{N}$.

Die Punkte aus $Z \cap [3,4)$ und $Z \cap [4,5]$ bezeichnen wir analog.

Aus der Definition von f folgt dann unmittelbar

$$\begin{aligned}\omega(f, Z) = &\sum_{k=1}^{n_0} 1(x_k^{(0)} - x_{k-1}^{(0)}) + 1(x_0^{(1)} - x_{n_0}^{(0)}) + \\ &\sum_{k=1}^{n_1} 4(x_k^{(1)} - x_{k-1}^{(1)}) + 2(x_0^{(2)} - x_{n_1}^{(1)}) + \\ &\sum_{k=1}^{n_2} 2(x_k^{(2)} - x_{k-1}^{(2)}) + 2(x_0^{(3)} - x_{n_2}^{(2)}) + \\ &\sum_{k=1}^{n_3} 3(x_k^{(3)} - x_{k-1}^{(3)}) \overset{\text{Teleskop}}{=}\end{aligned}$$

$$1(b_0-1)+1(a_1-b_0)+4(b_1-a_1)+2(a_2-b_1)+2(b_2-a_2)+2(a_3-b_2)+3(5-a_3).$$

Analog erhalten wir

$$\Omega(f,Z)=1(b_0-1)+4(a_1-b_0)+4(b_1-a_1)+4(a_2-b_1)+2(b_2-a_2)+3(a_3-b_2)+3(5-a_3).$$

Wir vereinfachen jeweils noch zu

$$\omega(f,Z)=1(a_1-1)+4(b_1-a_1)+2(a_3-b_1)+3(5-a_3) \text{ und}$$

$$\Omega(f,Z)=1(b_0-1)+4(a_2-b_0)+2(b_2-a_2)+3(5-b_2).$$

b) Wir betrachten eine Zerlegung Z mit $\delta := \|Z\| < \frac{1}{2}$. Mit den Bezeichnungen aus a) erhalten wir aus der Konstruktion der entsprechenden Punkte dann

$$2-\delta \le b_0 \le 2, \quad 3-\delta \le b_1 \le 3, \quad 4-\delta \le b_2 \le 4 \quad \text{und}$$

$$2 \le a_1 \le 2+\delta, \quad 3 \le a_2 \le 3+\delta, \quad 4 \le a_3 \le 4+\delta.$$

Mit dem Ergebnis aus a) erhalten wir

$$\omega(f,Z) \ge 1(2-1)+4(3-\delta-(2+\delta))+2(4-3)+3(5-(4+\delta)) = 10-11\delta \text{ und}$$

$$\Omega(f,Z) \le 1(2-1)+4(3+\delta-(2-\delta))+2(4-3)+3(5-(4-\delta)) = 10+11\delta.$$

Es gilt also $10-11\delta \le \omega(f,Z) \le \sigma(f,Z) \le \Omega(f,Z) \le 10+11\delta$, und daraus folgt

$$\lim_{\|Z\|\to 0} \sigma(f,Z) = 10.$$

Also ist f integrierbar und es gilt $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx = 10.$

Aufgabe 4

Auf $[1,a]$ ist $\frac{1}{x}$ stetig, also integrierbar. Mit Satz 13.1.3 erhalten wir zunächst

$$\int_1^a \frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty} 1\cdot(a^{1/n}-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1\cdot\left(a^{1/n}\right)^{k-1}}\left(a^{1/n}\right)^{k-1} = \lim_{n\to\infty}(a^{1/n}-1)\sum_{k=1}^{n} 1 =$$

$$\lim_{n\to\infty}(a^{1/n}-1)n = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{1/n}-1}{1/n}.$$

Wir bemerken, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x\ln a)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x\ln a+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\frac{(x\ln a)^3}{3!}+\frac{(x\ln a)^4}{4!}+\cdots-1}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\ln a+\frac{x(\ln a)^2}{2!}+\frac{x^2(\ln a)^3}{3!}+\frac{x^3(\ln a)^4}{4!} = \ln a \text{ gilt.}$$

Daraus folgt schließlich $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{1/n}-1}{1/n} = \ln a.$

Bemerkung:

In der Vorlesung wurde $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} = \int_1^2\frac{1}{x}dx$ gezeigt. Zusammen mit dem eben gezeigten können wir also den Reihenwert der alternierenden harmonischen Reihe angeben: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} = \ln 2.$

Aufgabe 5

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^{-k}} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\Big)e^{-\frac{k}{n}}.$$

Ist $x_k^{(n)} := \frac{k}{n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ gesetzt, so ist $Z_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\} = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ und $\xi^{(n)} := (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1)$ ein zu Z_n passender Zwischenvektor. Wir definieren $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}$ und erhalten eine Riemann-Summe $\sigma_f(\xi^{(n)}, Z_n) := \sum_{k=1}^{n}(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)})f(x_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n})e^{-\frac{k}{n}}$. Da f als stetige Funktion über $[0,1]$ integrierbar ist, gilt

$$\lim_{\|Z\|\to 0}\sigma(f, Z) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Weiter gilt $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Aus beidem zusammen folgt $\lim_{n\to\infty}\sigma(f, Z_n) = \lim_{\|Z\|\to 0}\sigma(f, Z)$. Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^{-k}} = \lim_{n\to\infty}\sigma(f, Z_n) = \lim_{\|Z\|\to 0}\sigma(f, Z) = \int_0^1 f(x)\,dx =$$

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx \overset{\text{Bsp. (2) in 10.11}}{=} 1 - e^{-1} = 1 - \tfrac{1}{e}\,.$$

Aufgabe 6 (P)

a) Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen auf $(0,1]$ stetig.

Allerdings ist f auf $(0,1]$ nicht gleichmäßig stetig. Beweis:
Sei $\varepsilon = 1$ und sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $m, n \in \mathbb{N}$ so, dass $m > n$ und $1/n < \delta$ gilt. Für $x = 1/n$ und $y = 1/m$ ergibt sich

$$|x - y| = 1/n - 1/m < \delta\,,$$

jedoch ist

$$|f(x) - f(y)| = |n - m| \geqslant 1 = \varepsilon\,.$$

Folglich ist f nicht gleichmäßig stetig auf $(0,1]$.

b) Die Funktion f ist auf $[1,\infty)$ gleichmäßig stetig. Beweis:

Wir schätzen zunächst für beliebige $x, y \geqslant 1$ ab

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= \Big|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\Big| = \Big|\frac{y^2 - x^2}{x^2y^2}\Big| = \frac{|y-x|\cdot|x+y|}{x^2y^2} \leqslant |y-x|\,\frac{|x|+|y|}{x^2y^2}\\ &= |y-x|\,\frac{x+y}{x^2y^2} = |y-x|\Big(\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y}\Big) \leqslant 2\,|y-x|\,.\end{aligned}$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon/2$. Für alle $x, y \geqslant 1$ mit $|x - y| < \delta$ gilt nach obiger Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2\,|y - x| < 2\delta = \varepsilon.$$

Also ist f auf $[1,\infty)$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 7 (P)

Als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a,b]$ ist f gemäß der Ergänzungsvorlesung gleichmäßig stetig.
Wir konstruieren nun das n-te Glied einer geeigneten Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_n \in \mathbb{N}$.

Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ fest. Gemäß der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ so, daß aus $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| \leq \delta$ folgt: $|f(x) - f(y)| \leq 1/n$. Wir unterteilen $[a, b]$ in die disjunkten Intervalle $I_1 := [a, a+\frac{1}{\delta})$, $I_2 := [a+\frac{1}{\delta}, a+\frac{2}{\delta})$, $\ldots$, $I_{j-1} := [a+\frac{j-2}{\delta}, a+\frac{j-1}{\delta})$, $I_j := [a+\frac{j-1}{\delta}, b]$, wobei $j \in \mathbb{N}$ so gewählt sei, daß das „letzte" Intervall I_j nicht entartet sei und eine Länge von höchstens δ habe.
Wir definieren $t_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$t(x) = \begin{cases} f(a) & \text{falls } x \in I_1 \\ f(a + \frac{1}{\delta}) & \text{falls } x \in I_2 \\ f(a + \frac{2}{\delta}) & \text{falls } x \in I_3 \\ \vdots & \\ f(a + \frac{j-1}{\delta}) & \text{falls } x \in I_j \end{cases} .$$

Nach Definiton ist t_n eine Treppenfunktion. Außerdem läßt sich $\sup\limits_{x \in [a.b]} |f(x) - t_n(x)|$ wie folgt abschätzen: Sei $x \in [a, b]$ zunächst fest. Dann gibt es ein Intervall I_k, wobei $k \in \{1, 2, \ldots, j\}$ mit $x \in I_k$, insbesondere gilt also $|x - a + \frac{k-1}{\delta}| \leq \delta$.
Es folgt $|f(x) - t_n(x)| = |f(x) - f(a + \frac{k-1}{\delta})| \leq 1/n$.
$|f(x) - t_n(x)|$ läßt sich also unabhängig von x abschätzen, wir erhalten damit

$$\|f - t_n\|_\infty = \sup_{x \in [a.b]} |f(x) - t_n(x)| \leq 1/n \,.$$

Daraus folgt mit dem Sandwichtheorem $\lim\limits_{n \to \infty} \|f - t_n\|_\infty = 0$. Das bedeutet, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f.