KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis 20.01.2011
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Untersuchen Sie folgende Ausdrücke auf Konvergenz und berechnen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert:

a) $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx\,;$ **b)** $\lim\limits_{h\to\infty} \frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h} \ln x\,dx\,;$ **c)** $\lim\limits_{h\to 0+} \int_0^1 h^x \cos x\,dx\,.$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in D$, in denen die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

a) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = |\sin x|$

b) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = |x|^3$

c) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \begin{cases} -2 & \text{falls } x < 0 \\ 2 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$

d) $D = (0,\infty)\,,\quad f(x) = x^x$

e) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \begin{cases} x^2\,\sin\!\left(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4)\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

f) $D = (-\frac{1}{2}, 1)\,,\quad f(x) = \begin{cases} x^2 g(x) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases},$

wobei $g\colon (-\frac{1}{2}, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und beschränkte Funktion sei.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$.

a) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17$

b) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

c) $D = (0,\infty)\,,\quad f(x) = \sqrt{x}$

d) $D = (0,\infty)\,,\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \sin(x)e^x + x^2$

f) $D = \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \dfrac{\cos x}{\cosh x}$

g) $D = (1,\infty)\,,\quad f(x) = \ln(\ln x)$

h) $D = (0,\infty)\,,\quad f(x) = x^{(x^x)}$

i) $D = (0,\infty)\,,\quad f(x) = (x^x)^x$

j) $D = (0,\infty)\,,\quad f(x) = x^{(2^x)} + x^{(x^2)} + 2^{(x^x)}$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Funktion $\cos : (0,\pi) \to (-1,1)$ eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt und bestimmen Sie deren Ableitung auf $(-1,1)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und das Polynom $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Zeigen Sie, dass für alle $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt

$$p^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k \frac{k!}{(k-m)!}\, x^{k-m} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Folgern Sie hieraus $a_m = \frac{1}{m!}\, p^{(m)}(0)$ für alle $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aufgabe 6

a) Begründen Sie, dass jede der folgenden Funktionen ihr Maximum und Minimum annimmt, und berechnen Sie diese:

i) $f\colon [-3, 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 4x^2 + 2$;

ii) $g\colon [0, 10] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -6x + (|x-3| + 2)^2$.

b) Für eine physikalische Größe werden bei n Messungen die Messwerte $a_1, \ldots, a_n$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man dann eine Zahl a an, für die

$$f(a) = \min\{\, f(x) : x \in \mathbb{R}\,\} \quad \text{mit} \quad f(x) := \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$$

gilt (*Methode der kleinsten Quadrate*). Zeigen Sie, dass a eindeutig bestimmt ist und berechnen Sie das anzugebende Messergebnis.

Aufgabe 7 (P)

a) Gegeben sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$.

Zeigen Sie, dass dann $\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k$ für alle $x \in (-R, R)$ gilt.

b) Bestimmen Sie $\int_0^x \cosh t\, dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweise:

Übungsklausur

Die Übungsklausur findet am Samstag, den 29.1.2011, um 08.00-10.00 Uhr statt.

Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.