KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x^2)$ als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig ist, gibt es zu jedem $h > 0$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a-h, a+h]$ mit

$$\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx = \int_{a-h}^{a+h} 1\,dx\,\cos(\xi_h^2) = \big((a+h)-(a-h)\big)\cos(\xi_h^2) = 2h\cos(\xi_h^2)\,.$$

Also ist $\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h}\cos(x^2)\,dx = 2\cos(\xi_h^2)$ für jedes $h > 0$. Für $h \to 0+$ konvergiert ξ_h gegen a und wegen der Stetigkeit von f konvergiert damit auch $\cos(\xi_h^2)$ gegen $\cos(a^2)$. Zusammen folgt

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h}\cos(x^2)\,dx = 2\cos(a^2)\,.$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Für jedes $h > \max\{0, -a\}$ (Man muss $h > -a$ fordern, damit $\ln\colon [a+h, a+2h] \to \mathbb{R}$ überhaupt definiert ist.) existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a+h, a+2h]$ mit

$$\int_{a+h}^{a+2h}\ln x\;dx = ((a+2h)-(a+h))\ln\xi_h = h\ln\xi_h\,.$$

Demzufolge ist $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h}\ln x\;dx = \ln\xi_h$. Mit $h\to\infty$ geht ξ_h gegen ∞ und damit strebt auch $\ln\xi_h$ gegen ∞. Also konvergiert der Ausdruck $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h}\ln x\;dx$ für $h\to\infty$ nicht.

c) Wir zeigen, dass der Grenzwert 0 ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$.

Wir zerlegen das Intervall $[0,1]$ in zwei Teilintervalle so, dass der Betrag des Integrals über ein Teilintervall durch $\varepsilon/2$ abgeschätzt werden kann.

Das erste Intervall soll die Länge $\varepsilon/2$ haben. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in [0, \varepsilon/2]$ mit

$$\Big|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos x\;dx\Big| = \Big|\frac{\varepsilon}{2}\Big|\;|h^\xi|\;|\cos\xi| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für jedes } h\in(0,1)\,.$$

Für $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$ gilt $\xi \geqslant \varepsilon/2$. Sei nun $h > 0$ so klein, dass $h^{\varepsilon/2} < \varepsilon/2$ ist. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für ein $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$

$$\Big|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos x\;dx\Big| \leqslant \underbrace{(1-\varepsilon/2)}_{\leqslant 1}|h^\xi|\;|\cos\xi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen können wir abschätzen

$$\Big|\int_0^1 h^x\cos x\,dx\Big| = \Big|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos x\,dx + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos x\;dx\Big| \leqslant \Big|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos x\,dx\Big| + \Big|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos x\,dx\Big| < \varepsilon.$$

Also ist $\lim\limits_{h\to 0+}\int_0^1 h^x\cos x\,dx = 0$.

Aufgabe 2

a) Die Funktion f läßt sich offenbar auch als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ \sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ gerade} \\ -\sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ ungerade} \end{cases}$$

schreiben.

Weil sin auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{\, k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ gerade} \\ -\cos x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

In den Punkten $\{\, k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}$ ist f nicht differenzierbar: Wir untersuchen zunächst die Stellen $x_0 = k\pi$ mit geradem k und zeigen, daß der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ nicht existiert: Es gilt nämlich

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = \lim_{x\to x_0+} \frac{\sin x_0 - \sin x}{x_0-x} = \sin'(x_0) = \cos(x_0) = 1 \text{ und}$$

$$\lim_{x\to x_0-} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = \lim_{x\to x_0-} \frac{-\sin x_0 - (-\sin x)}{x_0-x} = (-\sin)'(x_0) = -\cos(x_0) = -1.$$

Also ist f in diesen Punkten nicht differenizierbar. An den Stellen $k\pi$ mit ungeradem k kann man analog zeigen, daß die einseitigen Grenzwerte des Differenzierquotienten gegen -1 und 1 konvergieren, weswegen f dann auch in diesen Punkten nicht differenizierbar ist.

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \geqslant 0\,, \\ -x^3 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

Nach Beispiel (3) in 13.4 ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$, $x > 0$. Ebenso ist f auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar mit $f'(x) = -3x^2$, $x < 0$. Wegen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0+} x^2 = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to 0-} -x^2 = 0$$

ist $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, d.h. f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geqslant 0\,, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

c) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f offenbar differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$. In der Stelle 0 ist f nicht stetig, also erst recht nicht differenzierbar.

d) Wegen $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ so ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf D. Ketten- und Produktregel liefern

$$f'(x) = e^{x\ln x}(x \ln x)' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot x^{-1}) = (1 + \ln x)x^x \qquad \text{für jedes } x > 0.$$

e) Für $x > 0$ gilt
$$f(x) = x^2 \sin\bigl(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr)\,.$$
Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\bigl(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr) + x^2 \cos\bigl(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr)\cdot\bigl(e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\tfrac{1}{x^2}) - \tfrac{1}{x^4}\cdot 4x^3\bigr) \\ &= 2x \sin\bigl(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr) - \bigl(e^{\frac{1}{x}} + 4x\bigr)\cdot\cos\bigl(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr)\,, \qquad x > 0\,. \end{aligned}$$
Für $x < 0$ gilt
$$f(x) = x^2 \sin\bigl(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr)\,.$$
Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f auf $(-\infty,0)$ differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\bigl(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr) + x^2 \cos\bigl(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr)\cdot\bigl(e^{-\frac{1}{x}}\cdot\tfrac{1}{x^2} - \tfrac{1}{x^4}\cdot 4x^3\bigr) \\ &= 2x \sin\bigl(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr) + \bigl(e^{-\frac{1}{x}} - 4x\bigr)\cdot\cos\bigl(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\bigr)\,, \qquad x < 0\,. \end{aligned}$$
Außerdem gilt
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\bigl(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4)\bigr) = 0\,,$$
weil $|\sin(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4))| \leqslant 1$ für alle $x \neq 0$ ist. Damit ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

f) Auf $(-\frac{1}{2}, 1)\setminus\{0\}$ liefert die Produktregel die Differenzierbarkeit von f; es gilt
$$f'(x) = (x^2)'g(x) + x^2 g'(x) = 2xg(x) + x^2 g'(x) \qquad \text{für alle } x \in (-\tfrac{1}{2}, 1)\setminus\{0\}\,.$$
Auch in 0 ist f differenzierbar; es ergibt sich nämlich für $x \neq 0$
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 g(x) - 0}{x} = xg(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$$
wegen der Beschränktheit der Funktion g. Also ist $f'(0) = 0$.

Aufgabe 3

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 5x^4 - 6x + 2$.

b) Nach der Quotientenregel gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{0-2x}{x^2+1} = \dfrac{-2x}{x^2+1}$.

c) Wegen $\sqrt{x} = x^{1/2}$ gilt $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für jedes $x > 0$.

d) Wegen $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ gilt $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$ für jedes $x > 0$.

e) Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich $f'(x) = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x + 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

f) Nach der Quotientenregel gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{\sin(x)\cosh(x) + \cos(x)\sinh(x)}{\cosh^2 x}$.

g) Mit Hilfe der Kettenregel erhält man für jedes $x \in (1,\infty)$
$$f'(x) = \ln'(\ln x)\cdot\ln'(x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,.$$

h) Wir setzen $g(x) := x^x = e^{x\ln x}$. Nach Aufgabe 2d) gilt dann $g'(x) = (1+\ln x)x^x$ für jedes $x > 0$. Außerdem ist $f(x) = x^{g(x)} = e^{g(x)\ln x}$ für jedes $x > 0$. Anwenden von Ketten- und Produktregel liefert
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{g(x)\ln x}\bigl(g(x)\ln x\bigr)' \\ &= x^{(x^x)}\bigl(g'(x)\ln x + g(x)x^{-1}\bigr) = x^{(x^x)}\bigl((1+\ln x)x^x\ln x + x^{x-1}\bigr)\,. \end{aligned}$$

i) Wegen $f(x) = (x^x)^x = x^{x \cdot x} = e^{x^2 \ln x}$ liefert die Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = e^{x^2 \ln x}\big(2x \ln x + x^2 \tfrac{1}{x}\big) = x^{(x^2)} x\big(2\ln x + 1\big) = x^{x^2+1}\big(2\ln x + 1\big)\,.$$

j) Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f auf D differenzierbar. Mit

$$f(x) = e^{(2^x)\cdot \ln x} + e^{x^2 \cdot \ln x} + e^{(x^x)\cdot \ln 2} = e^{e^{x\cdot \ln 2}\cdot \ln x} + e^{x^2 \cdot \ln x} + e^{e^{x \ln x}\cdot \ln 2}$$

folgt für jedes $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & e^{e^{x\cdot \ln 2}\cdot \ln x}\big(\ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} \ln x + e^{x\cdot \ln 2} \tfrac{1}{x}\big) + e^{x^2\cdot \ln x}\big(2x\ln x + x^2 \tfrac{1}{x}\big) + \\ & e^{e^{x \ln x}\cdot \ln 2}\big(e^{x \ln x}(1 \cdot \ln x + x \tfrac{1}{x}) \ln 2\big) = \\ & x^{(2^x)} 2^x \big(\ln 2 \cdot \ln x + \tfrac{1}{x}\big) + x^{(x^2)} x\big(2\ln x + 1\big) + 2^{(x^x)} x^x (1 + \ln x) \ln 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Aus der Vorlesung ist bekannt, daß cos auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist. Also ist cos insbesondere auf $(0, \pi)$ injektiv. Weiter folgt wegen der Stetigkeit der cos-Funktion sowie $\cos 0 = 1$ und $\cos \pi = -1$ aus dem Zwischenwertsatz $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. Daraus folgt $\cos((0, \pi)) = (-1, 1)$; Die Funktion $\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$ ist also auch surjektiv und damit bijektiv; insbesondere beitzt sie eine Umkehrfunktion, die wir wie üblich mit Arccos bzeichnen.
Weiter ist cos auf $(0, \pi)$ differenzierbar und es gilt $\cos'(x) = -\sin x \neq 0$ für alle $x \in (0, \pi)$. Nach Satz 13.5.19 ist Arccos also auf $-1, 1$ differenzierbar und es gilt

$$\operatorname{Arccos}'(y) = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arccos} y)} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{Arccos} y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \text{für alle } y \in (-1, 1),$$

wobei wir $\cos'(x) = -\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$ für alle $x \in (0, \pi)$ ausgenutzt haben.
Bemerkung: Die Arccos-Funktion ist natürlich auch für $x = \pm 1$ definiert, jedoch ist sie in diesen beiden Punkten nicht differenzierbar; die Funktion besitzt dort senkrechte Tangenten.

Aufgabe 5

Sei $k \in \mathbb{N}$ fest und $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$. Wir zeigen zuerst für jedes $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$

$$f^{(m)}(x) = \frac{k!}{(k-m)!}\, x^{k-m} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{$*$}$$

Beweis durch Induktion:
IA: Für $m = 1$ ist $f'(x) = kx^{k-1} = \frac{k!}{(k-1)!}\, x^{k-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.
IS: Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m < k$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte $f^{(m)}(x) = \frac{k!}{(k-m)!}\, x^{k-m}$ (IV). Es folgt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) &= \big(f^{(m)}\big)'(x) \overset{\text{(IV)}}{=} \Big(\frac{k!}{(k-m)!}\, x^{k-m}\Big)' \\ &= \frac{k!}{(k-m)\cdot(k-m-1)!}\,(k-m)x^{k-m-1} = \frac{k!}{(k-(m+1))!}\, x^{k-(m+1)}\,. \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich aus $(*)$: $f^{(k)}(x) = k!$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f^{(k)}$ konstant ist. Daher gilt $f^{(m)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > k$.
Nun sei $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fest. Für die m-te Ableitung des Polynoms

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

erhalten wir nach unseren Vorüberlegungen

$$p^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere für $x = 0$ ergibt sich

$$p^{(m)}(0) = \sum_{k=m}^{n} a_k \frac{k!}{(k-m)!} 0^{k-m} = a_m \, m!\,,$$

woraus $a_m = \frac{1}{m!} p^{(m)}(0)$ folgt.

Aufgabe 6

a) Sowohl f als auch g sind stetig und auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall definiert. Daher nehmen diese Funktionen ihr Maximum und Minimum an (vgl. Satz 7 in 10.4).

i) Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-3, 2]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f. Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)\,.$$

Die Nullstellen von f' lauten 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen neben diesen drei Stellen (die alle im Intervall $[-3, 2]$ liegen!) auch die Ränder des Intervalls $[-3, 2]$ untersuchen: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum von f ist folglich 47, das Minimum ist -2.

ii) Die Funktion g ist außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte von $[0, 10]$, den Punkt 3 sowie alle Punkte im Innern von $[0, 10] \setminus \{3\}$ untersuchen, an denen die Ableitung von g verschwindet. Auf $(0, 3)$ gilt

$$g(x) = -6x + (3 - x + 2)^2 = -6x + (5 - x)^2 = x^2 - 16x + 25\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 16\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8 \notin (0, 3)$. Also hat g' in $(0, 3)$ keine Nullstelle. Auf $(3, 10)$ gilt

$$g(x) = -6x + (x - 1)^2 = x^2 - 8x + 1\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 8\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3, 10)$. Wir müssen also die Punkte $0, 3, 4, 10$ untersuchen: $g(0) = 25$, $g(3) = -14$, $g(4) = -15$, $g(10) = 21$. Damit ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von g.

b) Wir untersuchen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$ auf Extremstellen. Nach der Kettenregel ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

Also ist

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k =: x_0\,.$$

Man überlegt sich leicht, daß die Funktion f wegen $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ ihr globales Minimum an mindestens einer Stelle annimmt. An allen solchen Stellen muß f' verschwinden. Weil f' aber genau eine Nullstelle hat (nämlich x_0), nimmt f ihr globales Minimum genau an dieser Nullstelle an. Deshalb ist $a = x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, d. h. das anzugebende Messergebnis entspricht dem arithmetischen Mittel aller Messwerte.

Aufgabe 7 (P)

a) Sei $x \in (-R, R)$.

Falls $x = 0$ ist nichts zu zeigen.

Andernfalls bezeichnen wir mit I das Intervall $[0, x]$ falls $x > 0$ und $[x, 0]$ falls $x < 0$. Jedenfalls ist I dann beschränkt und abgeschlossen und es gilt $I \subset (-R, R)$.

Aus der (Ergänzungs)vorlesung ist bekannt, daß die Funktionenfolge der Partialsummen $\left(x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ gleichmäßig auf I gegen f konvergiert.

Daraus folgt

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^x \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\,dt =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^x t^k\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1} - 0^{k+1}}{k+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k.$$

b) Gemäß a) gilt

$$\int_0^x \cosh t\,dt =$$

$$\int_0^x \frac{1}{0!} t^0 + 0t^1 + \frac{1}{2!} t^2 + 0t^3 + \frac{1}{4!} t^4 + 0t^5 + \frac{1}{6!} t^6 + \dots\,dt =$$

$$\frac{1}{0! \cdot 1} x^1 + \frac{0}{2} x^2 + \frac{1}{2! \cdot 3} x^3 + \frac{0}{4} x^4 + \frac{1}{4! \cdot 5} x^5 + \frac{0}{6} x^6 + \frac{1}{6! \cdot 7} x^7 + \dots =$$

$$\frac{1}{1!} x^1 + 0x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + 0x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + 0x^6 + \frac{1}{7!} x^7 + \dots =$$

$$\sinh(x).$$