KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

WS 2010/11
27.01.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ und entscheiden Sie, welche der beiden Zahlen e^π, π^e die größere ist.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für alle $x > y > 0$:

i) $x \ln x - y \ln y \leqslant (x-y)(1+\ln x)\,;$ **ii)** $e^{x^2} - e^{y^2} \leqslant (x-y)(x+y)\,e^{x^2}\,.$

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\,\right).$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-2}^2 |x-1|\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,\cos x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$ **e)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt$ **f)** $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$

g) $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx \quad (k\in\mathbb{Z})$ **h)** $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{2x^2}\sin(e^{x^2})\,dx$ **i)** $\displaystyle\int_1^4 \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt$ **b)** $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t}}\,dt$ **c)** $\displaystyle\int^x \arcsin(t)\,dt$

Aufgabe 5

a) Sei $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \int_x^{\sin x} \sin(e^t)\ dt$. Begründen Sie, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie $F'(x)$ für jedes $x\in\mathbb{R}$.

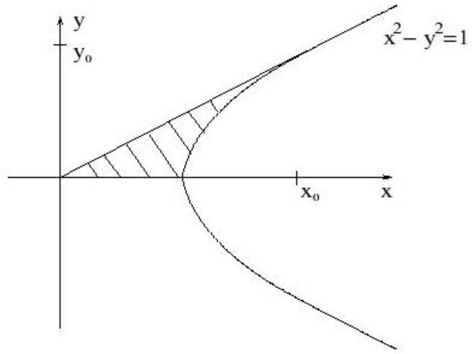
b) Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \int_0^x (1+4t)e^{t^2}\,dt + xe^{x^2}\,.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Der Schnittpunkt der skizzierten Geraden mit der Hyperbel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ sei (x_0, y_0). Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der schraffierten Fläche gleich $\frac{1}{2}\text{Arcosh}(x_0)$ ist.



Hinweis: Verwenden Sie $\text{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ für $x > 1$.

Aufgabe 7

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx \,.$$

Bestimmen Sie a_1 und a_2. Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$ eine Rekursionsformel zur Berechnung von a_n, wenn a_{n-2} bekannt ist. Ermitteln Sie hiermit a_3, a_4, a_5, a_6.

Aufgabe 8 (P)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \sin(x)y(x) = \sin(x)\,.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) - \frac{1}{1+x}y(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}, \quad y(1) = \frac{1}{2}\,.$$

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x \cos(x), \quad y(\pi/2) = 0,\, y'(\pi/2) = 0\,.$$