KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f'. Für jedes $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \quad \begin{cases} > 0 & \text{für } x < e, \\ < 0 & \text{für } x > e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases} (0,e] \\ [e,\infty) \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$ (daß man den Punkt e jeweils mit einschließen kann, erhält man direkt aus dem Mittelwertsatz).
Für $x, y \in (0,\infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x \quad &\iff \quad e^{y\cdot\ln(x)} > e^{x\cdot\ln(y)} \quad \overset{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\iff} \quad y\cdot\ln(x) > x\cdot\ln(y) \\ &\iff \quad \frac{\ln(x)}{x} > \frac{\ln(y)}{y} \quad \iff \quad f(x) > f(y)\,. \end{aligned}$$

Da $\pi > e$ und f auf (e,∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi) < f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi > \pi^e$.

Aufgabe 2

a) **i)** Seien $0 < y < x$. Definiere $f\colon [y,x] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t\ln t$. Dann ist f auf $[y,x]$ stetig und auf (y,x) differenzierbar mit $f'(t) = 1\cdot\ln t + t\cdot\frac{1}{t} = 1 + \ln t$, $t \in (y,x)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$x\ln x - y\ln y = (x-y)f'(\xi) = (x-y)(1+\ln\xi) \leqslant (x-y)(1+\ln x)\,,$$

weil $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

ii) Seien $0 < y < x$. Betrachte die Funktion $f\colon [y^2,x^2] \to \mathbb{R},\ u \mapsto e^u$. Da f auf $[y^2,x^2]$ stetig und auf (y^2,x^2) differenzierbar ist, erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach existiert ein $\xi \in (y^2,x^2)$ mit

$$e^{x^2} - e^{y^2} = f(x^2) - f(y^2) = (x^2-y^2)f'(\xi) = \underbrace{(x-y)(x+y)}_{\geqslant 0} e^\xi \leqslant (x-y)(x+y)e^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.

b) Wir betrachten die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \cos\sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x-1,x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1)-f(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = f'(\xi_x)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\right| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x\in(x-1,x+1)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

Aufgabe 3

a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \tfrac{1}{8}(1+2x)^4\,\Big|_{x=0}^1 = \tfrac{1}{8}(3^4-1^4) = 10\,.$$

b) Wir zerlegen das Intervall:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1|\,dx &= \int_{-2}^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx = \int_{-2}^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\ &= \big(x-\tfrac{1}{2}x^2\big)\Big|_{-2}^1 + \big(\tfrac{1}{2}x^2 - x\big)\Big|_1^2 \\ &= \big(1-\tfrac{1}{2}\big) - (-2-2) + (2-2) - \big(\tfrac{1}{2}-1\big) = 5\,.\end{aligned}$$

c) Wegen $(\sin^2 x)' = 2\sin x\,\cos x$ ist $\frac{1}{2}\sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x\,\cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,\cos x\,dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{x=0}^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}\big(\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi) - \sin^2(0)\big) = \tfrac{1}{2}(1-0) = \tfrac{1}{2}\,.$$

d) Auch hier kann man eine Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx &= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}\,dx \\ &= -\tfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}\,\Big|_{x=0}^1 = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{9}\,) = \tfrac{1}{4}(3-\sqrt{5}\,)\,.\end{aligned}$$

e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t) = \sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $g'(t)\,dt = (2\sqrt{t}\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t=1$ entspricht $x = g(1) = 1$ und $t = 4$ entspricht $x = g(4) = 2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x}\,dx = 2\ln|1+x|\,\Big|_{x=1}^2 = 2\big(\ln(3)-\ln(2)\big) = 2\ln\tfrac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \int_1^e f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=1}^e - \int_1^e f'(x)g(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x\Big|_{x=1}^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2\ln e - \ln 1) - \int_1^e \tfrac{1}{2}x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \big(\tfrac{1}{4}x^2\big)\Big|_{x=1}^e = \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

g) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\,dx &= -\cos x\Big|_{x=(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi) + \cos((k-1)\pi) \\ &= -(-1)^k + (-1)^{k-1} = (-(-1)+1)(-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}\,.\end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat und stetig ist, ist sin auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder $\geqslant 0$ oder $\leqslant 0$. Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\,dx\right| = 2\,.$$

h) Die Substitution $e^{x^2} = t$, $dt = 2xe^{x^2}\,dx$ führt auf

$$\int_0^1 x\,e^{2x^2}\sin(e^{x^2})\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e t\sin t\,dt\,.$$

Mithilfe von partieller Integration ist

$$\frac{1}{2}\int_1^e t\sin t\,dt = -\frac{t}{2}\cos t\Big|_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e \cos t\,dt = \left[\frac{-t\cos t + \sin t}{2}\right]_1^e = -\frac{e}{2}\cos e + \frac{\sin e}{2} + \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}\,.$$

i) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d.h. $x = t^2$. Dann ist $dx = 2t\,dt$ und aus $x : 1 \to 4$ ergibt sich $t : 1 \to 2$

$$\int_1^4 \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx = \int_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}\,)\cdot 2t\,dt\,;$$

nun substituieren wir $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2+1$, $dt = 2u\,du$, $t : 1 \to 2$ wird zu $u : 0 \to 1$,

$$= \int_0^1 \arctan(u)\cdot 2(u^2+1)\cdot 2u\,du = \int_0^1 (4u^3+4u)\arctan(u)\,du\,.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.) Dann führen wir eine partielle Integration aus mit $f(u) = \arctan(u)$ und $g'(u) = 4u^3 + 4u$:

$$\begin{aligned}
&= (u^4+2u^2)\arctan(u)\,\Big|_{u=0}^1 - \int_0^1 (u^4+2u^2)\frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= 3\arctan(1) - \int_0^1 \frac{(u^2+1)^2-1}{1+u^2}\,du = \tfrac{3}{4}\pi - \int_0^1 (u^2+1)\,du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \tfrac{3}{4}\pi - (\tfrac{1}{3}u^3+u)\Big|_{u=0}^1 + \arctan(u)\Big|_{u=0}^1 = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4}\pi = \pi - \tfrac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Hier substituieren wir $u = e^t$. Dies liefert $du = e^t\,dt$ und damit

$$\int^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt = \int^{e^x} \frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan(u) + k\Big|_{u=e^x} = \arctan(e^x) + k\,,$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ beliebig. Folglich ist jede der Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(e^x) + k$, $k \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{e^t}{e^{2t}+1}$, und es gibt keine weiteren Stammfunktionen.

b) Die Substitution $u = 1 - t$ liefert $du = (-1)\,dt$, also

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t}}\,dt &= \int^{1-x} \frac{1-u}{\sqrt{u}}(-1)\,du = \int^{1-x} (u^{1/2} - u^{-1/2})\,du = \tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} + k\Big|_{u=1-x} \\
&= \tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2} + k\,,
\end{aligned}$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ beliebig.

c) Wir verwenden partielle Integration mit $f(t) = \arcsin t$ und $g'(t) = 1$:

$$\begin{aligned}
\int^x \arcsin t\,dt &= \int^x 1\cdot\arcsin t\,dt = t\,\arcsin t\Big|_{t=x} - \int^x t\,\arcsin'(t)\,dt \\
&= x\,\arcsin x - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = x\,\arcsin x + \sqrt{1-t^2} + k\Big|_{t=x} \\
&= x\,\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k\,,
\end{aligned}$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 5

a) Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x \sin(e^t)\, dt$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$.

Dann ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \sin(e^x)$. Bekanntlich ist auch g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) = \cos x$. Wegen $F(x) = f(g(x)) - f(x)$ liefert die Kettenregel, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$F'(x) = f'(g(x))\, g'(x) - f'(x) = \sin(e^{\sin x})\, \cos(x) - \sin(e^x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}\,.$$

b) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x (1 + 4t)e^{t^2}\, dt$ ist nach dem Hauptsatz auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Daher ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = (1 + 4x)e^{x^2} + e^{x^2} + xe^{x^2} 2x = (2 + 4x + 2x^2)e^{x^2} = 2(1 + x)^2\, e^{x^2}\,.$$

Also gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -1$ ist. Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ wechselt f' in -1 das Vorzeichen nicht, so dass in -1 keine lokale Extremstelle von f vorliegt. Folglich besitzt f auf $\mathbb{R}$ keine lokalen Extremstellen.

Aufgabe 6

Sei (x_0, y_0) der Schnittpunkt im ersten Quadranten der Geraden mit der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.
Für $x, y \geqslant 0$ gilt $x^2 - y^2 = 1$ genau dann, wenn $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ist.
Das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(x_0, 0)$ und (x_0, y_0) hat den Flächeninhalt

$$F_D := \frac{1}{2}\, x_0\, y_0 = \frac{1}{2}\, x_0 \sqrt{x_0^2 - 1}\,.$$

Die gesuchte Fläche erhalten wir, indem wir hiervon die Fläche unter der Hyperbel

$$F_H := \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

subtrahieren. Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned}\int_1^{x_0} 1 \cdot \sqrt{x^2 - 1}\, dx &= \Big(x\sqrt{x^2 - 1}\Big)\Big|_{x=1}^{x_0} - \int_1^{x_0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx \\ &= x_0\sqrt{x_0^2 - 1} - \int_1^{x_0} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx\,.\end{aligned}$$

Kürzen wir den Integranden im zweiten Summanden und addieren auf beiden Seiten $\int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$, so bekommen wir

$$2\int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\, dx = x_0\sqrt{x_0^2 - 1} - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx\,.$$

Wegen $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ für $x > 1$ und $\operatorname{Arcosh}(1) = 0$ folgt

$$\int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Arcosh}(x)\Big)\Big|_{x=1}^{x_0} = \frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\,.$$

Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$F_D - F_H = \frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2 - 1} - \left(\frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\,.$$

Aufgabe 7

Es gilt

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\tfrac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1\,.$$

Zur Berechnung von a_2 benutzen wir partielle Integration mit $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin x\, dx = \big[\sin x \cdot (-\cos x)\big]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (-\cos x)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - (\sin x)^2\big)\, dx = \tfrac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2\, dx\,.\end{aligned}$$

Betrachtet man den ersten und den letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2\, dx = \tfrac{\pi}{2}\,, \qquad \text{also} \quad a_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2\, dx = \tfrac{\pi}{4}\,.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-1} \cdot (\sin x)\, dx \\ &= \big[(\sin x)^{n-1} \cdot (-\cos x)\big]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x \cdot (-\cos x)\, dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}(\cos x)^2\, dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}(1 - \sin^2 x)\, dx \\ &= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\, dx\right) = (n-1)(a_{n-2} - a_n)\,,\end{aligned}$$

also

$$a_n = \frac{n-1}{n}\, a_{n-2}\,.$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformel erhalten wir

$$a_3 = \frac{2}{3}\, a_1 = \frac{2}{3}\,, \qquad a_4 = \frac{3}{4}\, a_2 = \frac{3\pi}{16}\,, \qquad a_5 = \frac{4}{5}\, a_3 = \frac{8}{15}\,, \qquad a_6 = \frac{5}{6}\, a_4 = \frac{5\pi}{32}\,.$$

Bemerkung: Ist n gerade, d.h. existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$, so gilt

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n-1}{n}\, a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2}\, a_{n-4} = \ldots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}\, a_0 \\ &= \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot(2k-5)\cdot\ldots\cdot 1}{2k \cdot 2(k-1) \cdot 2(k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}\, \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{2^{2k}\cdot(k!)^2}\, \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Ist n ungerade, d.h. existiert $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $n = 2k+1$, so gilt

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n-1}{n}\, a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2}\, a_{n-4} = \ldots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3}\, a_1 \\ &= \frac{(n-1)^2 \cdot (n-3)^2 \cdot (n-5)^2 \cdot \ldots \cdot 2^2}{n!} \cdot 1 \\ &= \frac{(2k)^2 \cdot (2(k-1))^2 \cdot (2(k-2))^2 \cdot \ldots \cdot (2\cdot 1)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k}\cdot(k!)^2}{(2k+1)!}\,.\end{aligned}$$

Diese expliziten Darstellungen von a_n bestätigt man leicht mit Hilfe von vollständiger Induktion.

Aufgabe 8 (P)

a) Gemäß der Lösungformel aus der Ergänzungsvorlesung erhalten wir mit $p(x) := \sin x$, $q(x) := \sin x$ und etwa $x_0 := 0$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ mittels

$$y(x) = a \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right) + \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)\int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau\right) q(t)\,dt \text{ eine Lösung}$$

auf $\mathbb{R}$, wobei dann $y(x_0) = a$ gilt. Gemäß der Ergänzungvorlesung sind das alle Lösung der Differentialgleichung.

Damit gilt

$$y(x) = a \exp\left(-\int_0^x \sin t\,dt\right) + \exp\left(-\int_0^x \sin t\,dt\right)\int_0^x \exp\left(\int_0^t \sin\tau d\tau\right)\sin(t)\,dt =$$

$$a \exp\left([\cos t]_{t=0}^{t=x}\right) + \exp\left([\cos t]_{t=0}^{t=x}\right)\int_0^x \exp\left([-\cos\tau]_{\tau=0}^{\tau=t}\right)\sin(t)\,dt =$$

$$a \exp(\cos x - 1) + \exp(\cos x - 1)\int_0^x \exp(1 - \cos\tau)\sin(t)\,dt =$$

$$\frac{a}{e}\exp(\cos x) + \exp(\cos x)\int_0^x \exp(-\cos t)\sin(t)\,dt =$$

$$\frac{a}{e}\exp(\cos x) + \exp(\cos x)[\exp(-\cos t)]_{t=0}^{t=x} =$$

$$\frac{a}{e}\exp(\cos x) + \exp(\cos x)(\exp(-\cos x) - e) =$$

$$\frac{a}{e}\exp(\cos x) + 1 - e\exp(\cos x)$$

$$\left(\frac{a}{e} - e\right)\exp(\cos x) + 1.$$

Weil $a \mapsto \frac{a}{e} - e$ eine Bijektion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist, lautet die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung also

$$y(x) = a\exp(\cos x) + 1, \text{ wobei } a \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

b) Wir bemerken zunächst, daß die rechte Seite nur für $x \neq -1$ definiert ist. Wir können die Differentialgleichung also auf $(-\infty, -1)$ oder auf $(-1, \infty)$ betrachten. Wegen der Anfangsbedingung $y(1) = \frac{1}{2}$ ist nur das letztgenannte Intervall von Interesse. Gemäß der Lösungformel aus der Ergänzungsvorlesung erhalten wir mit $p(x) := -\frac{1}{1+x}$, $q(x) := \frac{-2}{(1+x)^2}$ und $x_0 := 1$ mittels

$$y(x) = y(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right) + \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)\int_{x_0}^{x}\exp\left(\int_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau\right)q(t)\,dt \textit{ die } \text{Lösung}$$

auf $(-1, \infty)$.

Damit gilt

$$y(x) =$$

$$\frac{1}{2}\exp\left(-\int_1^x -\frac{1}{1+t}\,dt\right) + \exp\left(-\int_1^x -\frac{1}{1+t}\,dt\right)\int_1^x \exp\left(\int_1^t -\frac{1}{1+\tau}d\tau\right)\frac{-2}{(1+x)^2}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\exp\left([\ln(1+t)]_{t=1}^{t=x}\right) + \exp\left([\ln(1+t)]_{t=1}^{t=x}\right)\int_1^x \exp\left([-\ln(1+\tau)]_{\tau=1}^{\tau=t}\right)\frac{-2}{(1+t)^2}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}(1+x)\cdot\frac{1}{2} + (1+x)\cdot\frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{1+t}\cdot 2\frac{-2}{(1+t)^2}\,dt =$$

$$\frac{1}{4}(1+x) + (1+x)\int_1^x \frac{-2}{(1+t)^3}\,dt =$$

$$\frac{1}{4}(1+x) + (1+x)\left[\frac{1}{(1+t)^2}\right]_{t=1}^{t=x} =$$

$$\frac{1}{4}(1+x) + (1+x)\left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{(1+x)}.$$

c) Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$y''(x) + 2ay'(x) + 2y(x) = g(x)\,. \tag{$*$}$$

Wir setzen also $a := -1$, $b := 2$ und $g(x) := \mathrm{e}^x \cos(x)$.

Wir gehen gemäß der Ergänzungsvorlesung vor und betrachten zunächst das folgende Problem

$$\varphi''(x) + \omega^2\varphi(x) = 0, \qquad \varphi(x) \neq 0$$

mit $\omega^2 = b - a^2 = 2 - 1 = 1$. Offenbar ist $\varphi(x) := \sin(x)$ eine Lösung, die zumindest einer Umgebung (etwa $(0,\pi)$) der vorgegebenen Stelle $x_0 := \pi/2$ nicht verschwindet.

Die allgemeine Lösung von $(*)$ erhalten wir dann durch die Lösungsformel

$$y(x) = e^{-ax}\left(\varphi(x)\int_{x_0}^x \frac{\int_{x_0}^\tau f(t)\varphi(t)\,dt}{\varphi^2(\tau)}\,d\tau + c_1\varphi(x)\int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi(\tau)^2}\,d\tau + c_2\varphi(x)\right)$$

mit $f(x) := e^{ax}g(x) = \cos(x)$ und gewissen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Es folgt

$$y(x) = e^x\left(\sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\int_{\pi/2}^\tau \cos(t)\sin(t)\,dt}{\sin^2(\tau)}\,d\tau + c_1\sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{1}{\sin^2(\tau)}\,d\tau + c_2\sin(x)\right).$$

Wir berechnen die auftretenden Integrale:

$$\int_{\pi/2}^\tau \cos(t)\sin(t)\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_{t=\pi/2}^{t=\tau} = \frac{1}{2}\sin^2(\tau) - \frac{1}{2},$$

$$\int_{\pi/2}^x \frac{\int_{\pi/2}^\tau \cos(t)\sin(t)\,dt}{\sin^2(\tau)}\,d\tau = \int_{\pi/2}^x \frac{\frac{1}{2}\sin^2(\tau) - \frac{1}{2}}{\sin^2(\tau)}\,d\tau = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^x \frac{1}{\sin^2(\tau)}\,d\tau,$$

$$\int_{\pi/2}^x \frac{1}{\sin^2(\tau)}\,d\tau = \left[-\frac{\cos(\tau)}{\sin(\tau)}\right]_{\tau=\pi/2}^{\tau=x} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Bemerkung: Die Idee für eine Stammfunktion zu $\frac{1}{\sin^2}$ erhält man aus dem Vergleich mit $\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{1}{\cos^2}$.

Es gilt also

$$y(x) = e^x\left(\sin(x)\Big(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\Big) + c_1\sin(x)\frac{-\cos(x)}{\sin(x)} + c_2\sin(x)\right) =$$

$$e^x\left(\frac{1}{2}x\sin(x) + \Big(\frac{1}{2} - c_1\Big)\cos(x) + c_2\sin(x)\right).$$

Mit den Anfangsbedingungen $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = 0$ bestimmen wir nun c_1 und c_2: Es gilt $0 = y(\pi/2) = e^{\pi/2}(\frac{1}{2}\pi/2 \cdot 1 + 0 + c_2 \cdot 1)$ und damit $c_2 = -\pi/4$. Damit folgt

$$y'(x) = e^x\left(\frac{1}{2}x\sin(x) + \Big(\frac{1}{2} - c_1\Big)\cos(x) - \frac{\pi}{4}\sin(x) + \right.$$

$$\frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \left(\frac{1}{2} - c_1\right)\sin(x) - \frac{\pi}{4}\cos(x)\Bigg), \text{ also}$$

$$0 = y'(\pi/2) = e^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\pi/2 \cdot 1 + 0 - \frac{\pi}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 - \left(\frac{1}{2} - c_1\right) \cdot 1 - 0\right) \text{ und damit } c_1 = 0.$$

Wir erhalten also

$$y(x) = e^x\left(\frac{1}{2}x\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) - \pi/4\sin(x)\right).$$

Die obige Berechnung hat gezeigt, daß dies eine Lösung auf $(0, \pi)$ ist. Wie man aber leicht nachprüft, löst y die Diffrentialgleichung auf ganz $\mathbb{R}$.