KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f''''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,,$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) = 1\,, \qquad f''(0) = -1\,, \qquad f'''(0) = 2\,, \qquad f''''(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f,0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_4(f,0)(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + x + \tfrac{1}{2!}\,(-1)x^2 + \tfrac{1}{3!}\,2x^3 + \tfrac{1}{4!}\,(-6)x^4 \\ &= x - \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\,. \end{aligned}$$

Sei $x \geqslant 0$. Um die Abschätzung $0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f,0)(x) \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_4(f,0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!}\,(x-0)^{4+1}\,,$$

also mit

$$f(x) - T_4(f,0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5\,.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leqslant \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 = \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \geqslant 0\,,$$
$$\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 = \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1+0)^5}\,x^5 = \frac{1}{5}\,x^5\,.$$

b) Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion $f\colon(-2,\infty)\to\mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}\,.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1]$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2 = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\,.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$\left|f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\right| \leqslant \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

Aufgabe 2

Setze $f(x) := \frac{10}{7}\sqrt{1+x}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n \in [-\frac{1}{50}, 0]$ mit

$$\sqrt{2} = f\left(-\frac{1}{50}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\left(-\frac{1}{50}\right)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{50}\right)^{n+1}.$$

Jetzt wollen wir n so groß wählen, dass das Restglied $\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(-\frac{1}{50})^{n+1}$ betragsmäßig kleiner als 10^{-6} wird. Es zeigt sich, dass dies schon für $n = 2$ erfüllt ist; wegen

$$\left|\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{50}\right)^3\right| = \frac{1}{6\cdot 50^3} = \frac{8}{6\cdot 100^3} = \frac{4\cdot 10^{-6}}{3}$$

müssen wir nur noch $|f^{(3)}(\xi_2)| < \frac{3}{4}$ zeigen. Mit $|\xi_2| \leqslant \frac{1}{50}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
|f^{(3)}(\xi_2)| &= \left|\frac{10}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(1+\xi_2)^{-5/2}\right| = \frac{15(1+\xi_2)^{-5/2}}{28} \\
&\leqslant \frac{15}{28}\left(\frac{49}{50}\right)^{-5/2} = \frac{15\cdot\sqrt{50}^{\,5}}{28\cdot 7^5} \leqslant \frac{15\cdot 8\cdot 50^2}{28\cdot 7^5} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5\cdot 8\cdot 50^2}{7^6}\,.
\end{aligned}$$

Nun möchten wir $\frac{5\cdot 8\cdot 50^2}{7^6} < 1$ zeigen. Dies stimmt wegen

$$7^6 = 49^3 > 48^3 = (2^4\cdot 3)^3 = 2^{12}\cdot 3^3 = 4096\cdot 27 > 4000\cdot 25 = 100\,000 = 5\cdot 8\cdot 50^2\,.$$

Als Näherung für $\sqrt{2}$ erhalten wir unter Verwendung von $f'(x) = \frac{10}{7}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ und $f''(x) = \frac{10}{7}\cdot(-\frac{1}{4})(1+x)^{-3/2}$

$$\begin{aligned}
f(0) + f'(0)\left(-\frac{1}{50}\right) + \frac{f''(0)}{2!}\left(-\frac{1}{50}\right)^2 &= \frac{10}{7}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{50}\right) - \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{50}\right)^2\right) \\
&= \frac{10}{7}\left(1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{20\,000}\right) = \frac{19\,799}{14\,000} \approx 1{,}414214\,.
\end{aligned}$$

(Die Dezimalentwicklung hat dann doch der Taschenrechner geliefert ...)

Aufgabe 3

a) Mit der aus der Vorlesung bekannten Reihenentwicklung von $\ln(1+y)$, $y \in (-1,1)$, erhalten wir für jedes $x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln\big((1-x)(1+x)\big) = \ln(1-x) + \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n + (-1)^{n+1}}{n}\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{-1+(-1)^{n+1}}{n}}_{=:a_n}\,x^n\,.
\end{aligned}$$

Nach Satz 3 in 14.3 ergibt sich

$$\begin{aligned}
f^{(20)}(0) &= 20!\,a_{20} = 20!\,\frac{-1-1}{20} = -2\cdot 19!\,, \\
f^{(31)}(0) &= 31!\,a_{31} = 0\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Natürlich kann man die Reihenentwicklung von $\ln(1+y)$ auch direkt auf f anwenden: Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt wegen $x^2 \in (-1,1)$

$$f(x) = \ln(1-x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-x^2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1) \frac{x^{2k}}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n} ,$$

wobei

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ -\frac{1}{k} & \text{falls } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ -\frac{2}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} = a_n .$$

b) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x} = \frac{1}{1-(x-1)} + \frac{1}{2-(x-1)} = \frac{1}{1-(x-1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}(x-1)} .$$

Gilt $|x-1| < 1$ und $|\frac{1}{2}(x-1)| < 1$, also $0 < x < 2$, so ergibt sich (geometrische Reihe!)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}(x-1)\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1}\right) (x-1)^k .$$

Damit liefert Satz 3 in 14.3 für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(1) = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} .$$

Insbesondere ist

$$f^{(2011)}(1) = 2011! \cdot \left(1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2012}\right) .$$

Aufgabe 4

Gemäß Vorlesung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x^2| < 1$ (also mit $|x| < 1$)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^{2k} .$$

Man sieht sofort, daß alle ungeraden Koeffiezienten 0 sind, insbesondere der 1. und der 317..
Der 0. Koeffizient ist $\binom{-1/2}{0} = 1$ (per Definition).
Der 2. Koeffizient ist $\binom{-1/2}{1} = \frac{-1/2}{1!} = -\frac{1}{2}$.
Der 8. Koeffizient ist $\binom{-1/2}{4} = \frac{-1/2 \cdot (-1/2-1) \cdot (-1/2-2) \cdot (-1/2-3)}{4!} = \frac{35}{128}$.

Aufgabe 5

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ setze $a_n := \frac{(-1)^n}{n^2-n}$. Wegen

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)^2-(n+1)}{n^2-n} = \frac{(1+1/n)^2 - (1/n + 1/n^2)}{1-1/n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

besitzt die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius 1, so dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert. Damit ist die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ wohldefiniert. Nach Satz 3 in 14.3 gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n x^{n-1}}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} .$$

Wie in der Vorlesung gesehen, stellt diese Potenzreihe die Funktion $(-1,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ dar, d. h. es ist $f'(x) = \ln(1+x)$. Aufgrund von $(y \ln y - y)' = \ln y$ für $y > 0$ folgt

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - (1+x) + c \qquad \text{für } |x| < 1$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0$ ergibt sich $c = 1$. Somit erhält man als Endergebnis

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-2}}{n^2 - n} = (1+x)\ln(1+x) - x \qquad \text{für } |x| < 1\,.$$

Aufgabe 6

Wir nutzen das Wurzelkriterium: Wegen

$$\sqrt[n]{|n(n+3)e^{nx}|} = \sqrt[n]{n(n+3)}\, e^x \xrightarrow{n\to\infty} e^x$$

gilt: Für $e^x < 1$ konvergiert die Reihe, für $e^x > 1$ divergiert sie. Das bedeutet: Für $x < 0$ liegt Konvergenz, für $x > 0$ Divergenz vor. Für $x = 0$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3) \cdot 1$, da $n(n+3) \nrightarrow 0$. Insgesamt: Genau für $x < 0$ konvergiert die Reihe.
Nun sei $x < 0$. Wir setzen $y := e^x$ und wollen

$$f(y) := \sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)y^{n-1}$$

berechnen. Offenbar besitzt $g(y) := f(y)/y$ die Stammfunktion

$$G(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)y^n = \frac{1}{y^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)y^{n+2}\,.$$

Nun hat wiederum $h(y) := y^2 G(y)$ die Stammfunktion

$$H(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n+3} \overset{k:=n-1}{=} y^4 \sum_{k=0}^{\infty} y^k \overset{|y|<1}{=} \frac{y^4}{1-y}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$h(y) = H'(y) = \frac{4y^3(1-y) + y^4}{(1-y)^2} = \frac{4y^3 - 3y^4}{(1-y)^2}, \qquad G(y) = \frac{h(y)}{y^2} = \frac{4y - 3y^2}{(1-y)^2}\,.$$

Also ist

$$g(y) = G'(y) = \frac{(4-6y)(1-y)^2 + (4y - 3y^2)2(1-y)}{(1-y)^4} = \frac{4-2y}{(1-y)^3}\,.$$

Schließlich ergibt sich dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)e^{nx} = f(y) = yg(y) = \frac{4y - 2y^2}{(1-y)^3} = \frac{4e^x - 2e^{2x}}{(1-e^x)^3}\,.$$

Aufgabe 7

Wir nehmen an, es gelte $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Potenzreihe dürfen wir im Inneren ihres Konvergenzintervalls nach Satz 3 in 14.3 gliedweise differenzieren, es gilt also

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\,.$$

Dies soll für alle $x \in \mathbb{R}$ übereinstimmen mit

$$-\omega^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\omega^2 a_n x^n\,.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen ist die Gleichung $y'' = -\omega^2 y$ also genau dann erfüllt, wenn

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\omega^2 a_n \quad \text{für alle } n \geqslant 0 \tag{$*$}$$

gilt. Die Forderungen $y(0) = y_0$ und $y'(0) = 0$ bedeuten $a_0 = y_0$ und $a_1 = 0$. Induktiv folgt dann aus $(*)$

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad a_{2n} = y_0 \omega^{2n} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Potenzreihe stellt die Funktion $y(x) = y_0 \cos(\omega x)$ dar.

Aufgabe 8 (P)

a) Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' - 5y' + 4y = 0$. Dazu machen wir den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Dann ist $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ und

$$y'' - 5y' + 4y = (\lambda^2 - 5\lambda + 4)e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Da das Polynom $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$ die Nullstellen 1 und 4 hat, lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' - 5y' + 4y = 0$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $y'' - 5y' + 4y = e^{2x}$ machen wir den Ansatz $y_\mathrm{p}(x) = Ce^{2x}$. Dann ist $y_\mathrm{p}'(x) = 2Ce^{2x}$ und $y_\mathrm{p}''(x) = 4Ce^{2x}$, also

$$y_\mathrm{p}'' - 5y_\mathrm{p}' + 4y_\mathrm{p} = 4Ce^{2x} - 10Ce^{2x} + 4Ce^{2x} = -2Ce^{2x}\,.$$

Damit dies $= e^{2x}$ wird, muss $C = -\frac{1}{2}$ gewählt werden. Es folgt $y_\mathrm{p}(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, also

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{4x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Aus $y(0) = 1$ folgt $-\frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 1$ und aus $y'(0) = -1$ folgt $-1 + C_1 + 4C_2 = -1$. Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, folgt $-3C_2 = \frac{3}{2}$, also $C_2 = -\frac{1}{2}$ und damit $C_1 = 2$. Die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems lautet daher

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - \tfrac{1}{2}e^{4x}\,.$$

b) Wir lösen zuerst die homogene Gleichung

$$v'(t) + \gamma v(t) = 0\,.$$

Diese besitzt die Lösungen $v(t) = Ce^{A(t)}$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante und A irgendeine Stammfunktion von $a(t) := -\gamma$ ist. Dies bedeutet für $t \in \mathbb{R}$

$$v(t) = Ce^{-\gamma t} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Eine spezielle Lösung v_p der inhomogenen Gleichung $v'(t) + \gamma v(t) = g$ verschaffen wir uns mit der Methode der Variation der Konstanten: Wir machen den Ansatz $v_\mathrm{p}(t) = C(t)v_\mathrm{h}(t)$ mit $v_\mathrm{h}(t) := e^{-\gamma t}$ und erhalten

$$\begin{aligned} v_\mathrm{p}'(t) + \gamma v_\mathrm{p}(t) &= C'(t)v_\mathrm{h}(t) + C(t)v_\mathrm{h}'(t) + \gamma C(t)v_\mathrm{h}(t) \\ &= C'(t)v_\mathrm{h}(t) + \big(v_\mathrm{h}'(t) + \gamma v_\mathrm{h}(t)\big)C(t) = C'(t)v_\mathrm{h}(t)\,. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass v_{h} die homogene Gleichung löst. Damit v_{p} die inhomogene Gleichung löst, muss mithin $C'(t)v_{\mathrm{h}}(t) = g$ sein, d. h. es muss

$$C'(t) = g/v_{\mathrm{h}}(t) = ge^{\gamma t}$$

gelten. Dies ist z.B. für $C(t) = \frac{g}{\gamma}e^{\gamma t}$ der Fall, so dass sich $v_{\mathrm{p}}(t) = \frac{g}{\gamma}$ ergibt.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, also

$$v(t) = v_{\mathrm{p}}(t) + Cv_{\mathrm{h}}(t) = \tfrac{g}{\gamma} + Ce^{-\gamma t} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Speziell für $t = 0$ erhalten wir $v(0) = \frac{g}{\gamma} + C$. Daher ist die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ genau für $C = v_0 - \frac{g}{\gamma}$ erfüllt. Somit lautet die gesuchte Lösung

$$v(t) = \tfrac{g}{\gamma} + (v_0 - \tfrac{g}{\gamma})e^{-\gamma t}\,.$$