KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis 11.02.2011
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

15. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie jeweils, ob die Regel von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos(1/x)}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin(x)\cos(x)}{(x+\sin(x)\cos(x))e^{\sin x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx \qquad (s<0,\ t\in\mathbb{R} \text{ fest})$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^4\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\ln(1+t)\,dt$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums alle $\alpha > 0$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$$

konvergiert.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : (9, 11) \to f(9, 11)$ seien definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1} & \text{falls } x \in (-\infty, 1)\,, \\ \sqrt{x} & \text{falls } x \in [1, 4]\,, \\ |x - 6| & \text{falls } x \in (4, 7)\,, \\ \tan(x - 7) + 1 & \text{falls } x \in [7, 7 + \frac{\pi}{2})\,, \\ x^3 - 30x^2 + 300x - 1000 & \text{falls } x \in [7 + \frac{\pi}{2}, 11)\,, \\ 3 - (x - 12)^4 & \text{falls } x \in [11, \infty) \end{cases} \qquad \text{und} \quad g(x) := f(x)\,.$$

a) Untersuchen Sie, in welchen Stellen f stetig ist.

b) Untersuchen Sie, in welchen Stellen f differenzierbar ist und bestimmen Sie dort ggf. die Ableitung.

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f.

d) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f.

e) Untersuchen Sie, ob f surjektiv ist.

f) Untersuchen Sie, ob f injektiv ist.

g) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^7 f(x)\,dx$.

h) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^{7+\pi/2} f(x)\,dx$ existiert.

i) Untersuchen Sie g auf Monotonie.

j) Bestimmen Sie das Bild von g.

k) Zeigen Sie, daß g bijektiv ist.

l) In welchen Stellen ist die Umkehrfunktion von g differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. $(g^{-1})'\left(\frac{1}{8}\right)$.

Hinweis: $g\left(\frac{21}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

Hinweise:

Sprechstunde der Tutoren:
Am Montag, den 21.02.2011, werden mehrere Tutoren Fragen zur Höheren Mathematik I von 14:00 Uhr bis 15:30 Uhr im Raum 1C-04 (Allianzgebäude) beantworten.

Klausur zur HM I: Montag, 28.02.2011, 08.00-10.00 Uhr

!!! Anmeldeschluss ist Freitag, der 11.02.2011 !!!

Informationen zur Prüfungsanmeldung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage.