KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils „$\frac{\infty}{\infty}$" und die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x ungleich 0). Dies führt auf

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \text{(falls die Grenzwerte existieren),}$$

hilft also nicht, den Grenzwert zu berechnen. Einfaches Kürzen mit e^x liefert aber

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1\,.$$

b) Auch hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „$\frac{0}{0}$"; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 1 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(x\ln x)' = x^x(1+\ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x)^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2\,.$$

c) Wir versuchen, ob wir die Regeln von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) - x^2\sin(1/x)(-\frac{1}{x^2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n/\cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x\cos(1/x) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

d) Zu untersuchen ist hier $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ für $f(x) := \int_0^x e^{t^2}\,dt$ und $g(x) := x^{-1}e^{x^2}$. Wir wenden die Regel von de l'Hospital an: Der zu untersuchende Grenzwert ist vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$" (Beachte: für $x \geqslant 0$ gilt $f(x) \geqslant \int_0^x 1\,dt = x$) und wegen

$$f'(x) = e^{x^2}, \qquad g'(x) = -x^{-2}e^{x^2} + x^{-1}e^{x^2}\cdot 2x = (2 - x^{-2})e^{x^2}$$

gilt: Die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x stets $\neq 0$ und der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{(2-x^{-2})e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 - x^{-2}} = \frac{1}{2}$$

existiert. Folglich ist auch der zu untersuchende Grenzwert $\frac{1}{2}$.

e) Wir setzen $f(x) := x + \sin(x)\cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin x}$. Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x \to \infty$ gegen ∞. Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ und

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x \cos^2 x) \\ &= e^{\sin x}\cos x\,(2\cos x + x + \sin x\cos x)\,. \end{aligned}$$

Wegen des Faktors $\cos x$ hat $g'(x)$ beliebig große Nullstellen. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

existiert nicht (Betrachte z.B. $x_n := (n + \frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene x, für die $g'(x) \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{e^{\sin x}(2\cos x + x + \sin x\cos x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0\,.$$

f) Wir wenden die Regel von de l'Hospital viermal an; die entsprechenden Stellen sind mit $(*)$ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x + 2x^2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{2x\sin^2 x + x^2\sin(2x)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos(2x)}{2\sin^2 x + 4x\sin x\cos x + 2x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos(2x)}{2\sin^2 x + 4x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\sin(2x)}{4\sin x\cos x + 4\sin(2x) + 8x\cos(2x) + 4x\cos(2x) - 4x^2\sin(2x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin(2x)}{(6 - 4x^2)\sin(2x) + 12x\cos(2x)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{8\cos(2x)}{-8x\sin(2x) + 2(6 - 4x^2)\cos(2x) + 12\cos(2x) - 24x\sin(2x)} \\ &= \frac{8}{0 + 12 + 12 + 0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Bemerkung: Mit Potenzreihen kommt man hier sehr schnell ans Ziel: Wegen

$$\sin^2 x = \left(x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - + \ldots\right)^2 = x^2 - \tfrac{2}{3!}x^4 + (\tfrac{2}{5!} + (-\tfrac{1}{3!})^2)x^6 + \ldots$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^6 + \ldots)}{x^2(x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^6 + \ldots)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!}x^4 - (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^6 - \ldots}{x^4 - \frac{2}{3!}x^6 + (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^8 + \ldots} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!} - (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^2 - \ldots}{1 - \frac{2}{3!}x^2 + (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^4 + \ldots} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}\,.$$

Für $R \to \infty$ strebt dies gegen $(\ln 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

b) Seien $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ fest. Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx\,.$$

Erneute partielle Integration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \frac{e^{sx}}{s^2}\,t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R \\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}\,t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}\,.\end{aligned}$$

(Man beachte $s < 0$.) Also konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx$ und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2+t^2}\,.$$

Aufgabe 3

a) Da der Integrand $f(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}$ auf $(0,1]$ stetig ist, ist f auf jedem Intervall $[\varepsilon,1]$, $0 < \varepsilon < 1$, integrierbar. Für alle $x \in (0,1]$ gilt $x^2 \leqslant \sqrt{x}$ und damit

$$|f(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Da das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert, ist $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

b) Bekanntlich gilt $x^\alpha \ln x \xrightarrow{x\to 0+} 0$ für jedes $\alpha > 0$, insbesondere also

$$x^{1/2}(\ln x)^4 = (x^{1/8}\ln x)^4 \xrightarrow{x\to 0+} 0\,.$$

Mit einem gewissen $\varepsilon > 0$ besteht daher für alle $x \in (0,\varepsilon]$ die Abschätzung

$$|x^{1/2}(\ln x)^4| \leqslant 1\,, \qquad \text{also} \qquad |(\ln x)^4| \leqslant x^{-1/2}\,.$$

Mit Hilfe des Majorantenkriteriums folgt daraus die Konvergenz von $\int_0^\varepsilon (\ln x)^4\,dx$, also auch die Konvergenz von $\int_0^1 (\ln x)^4\,dx = \int_0^\varepsilon (\ln x)^4\,dx + \int_\varepsilon^1 (\ln x)^4\,dx$.

Bemerkung: Um den Wert des uneigentlichen Integrals auszurechnen, bestimmen wir durch mehrmalige partielle Integration eine Stammfunktion von $t \mapsto (\ln t)^4$

$$\begin{aligned}\int^x (\ln t)^4\,dt &= \int^x 1\cdot(\ln t)^4\,dt = x\cdot(\ln x)^4 - \int^x t\cdot\frac{4(\ln t)^3}{t}\,dt = x\cdot(\ln x)^4 - 4\int^x 1\cdot(\ln t)^3\,dt \\ &= x\cdot(\ln x)^4 - 4x\cdot(\ln x)^3 + 12\int^x (\ln t)^2\,dt \\ &= x\cdot(\ln x)^4 - 4x\cdot(\ln x)^3 + 12x\cdot(\ln x)^2 - 24\int^x \ln t\,dt \\ &= x\cdot(\ln x)^4 - 4x\cdot(\ln x)^3 + 12x\cdot(\ln x)^2 - 24x\cdot\ln x + 24x + k\,, \qquad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Also gilt für jedes $\varepsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 (\ln x)^4\,dx &= \big[x\cdot(\ln x)^4 - 4x\cdot(\ln x)^3 + 12x\cdot(\ln x)^2 - 24x\cdot\ln x + 24x\big]_\varepsilon^1 \\ &= 24 - \varepsilon\cdot(\ln\varepsilon)^4 + 4\varepsilon\cdot(\ln\varepsilon)^3 - 12\varepsilon\cdot(\ln\varepsilon)^2 + 24\varepsilon\cdot\ln\varepsilon - 24\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 24\,.\end{aligned}$$

Hiermit haben wir erneut die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^1 (\ln x)^4\,dx$ gezeigt und gleichzeitig noch den Wert 24 ermittelt.

c) Da

$$\left|\frac{e^{2x}}{1+e^x}\right| = \frac{e^{2x}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$$

für alle $x \in (-\infty, 3]$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{3} e^x\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_r^3 e^x\,dx = \lim_{r\to-\infty} [\,e^x\,]_r^3 = \lim_{r\to-\infty} (e^3 - e^r) = e^3$$

existiert, ist $\int_{-\infty}^{3} \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

d) Aus der Ungleichung $1+t \leqslant e^t$ folgt $\ln(1+t) \leqslant t$ für alle $t \geqslant 0$. Also ist

$$|e^{-t}\ln(1+t)| \leqslant te^{-t} \qquad \text{für alle } t \geqslant 0\,.$$

Da das uneigentliche Integral $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$ (vgl. Aufgabe 5 mit $n=1$ und $\lambda = 1$) existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 4

Sei $\alpha > 0$. Die durch $f(x) := \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ definierte Funktion $f\colon [2,\infty) \to (0,\infty)$ ist monoton fallend. Denn: Für beliebige $x, y \in [2,\infty)$ mit $x \leqslant y$ gilt $\ln x \leqslant \ln y$ und somit $(\ln x)^\alpha \leqslant (\ln y)^\alpha$. Deshalb ergibt sich $x(\ln x)^\alpha \leqslant y(\ln y)^\alpha$, woraus $f(y) \leqslant f(x)$ folgt.
Nach dem Integralkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^\infty f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx$$

konvergiert. Die Substitution $y := \ln x$, $dy = \frac{1}{x}\,dx$ liefert

$$\int_2^R \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{y^\alpha}\,dy\,.$$

Im Fall $\alpha \leqslant 1$ divergiert die rechte Seite für $R \to \infty$, im Fall $\alpha > 1$ konvergiert die rechte Seite für $R \to \infty$ (vgl. Beispiel 16.2). Also konvergiert die Reihe genau für $\alpha > 1$.

Aufgabe 5

a) Auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 4, 7, 7+\frac{\pi}{2}, 11\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig.
Im Punkt $a \in \{1, 4, 7, 7+\frac{\pi}{2}, 11\}$ ist f jeweils genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

gilt.

- Zur Stelle 1:
  Es gilt

  $$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{2} \text{ und}$$

  $$f(1) = 1.$$

  f ist also in 1 nicht stetig.
- Zur Stelle 4:
  Es gilt

  $$\lim_{x\to 4-} f(x) = \lim_{x\to 4-} \sqrt{x} = 2,$$

$$f(4) = 2 \text{ und}$$

$$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 4+} |x-6| = 2.$$

f ist also in 4 stetig.

- Zur Stelle 7:
  Es gilt

$$\lim_{x\to 7-} f(x) = \lim_{x\to 7-} |x-6| = 1,$$

$$f(7) = \tan(0) + 1 = 1 \text{ und}$$

$$\lim_{x\to 7+} f(x) = \lim_{x\to 7+} \tan(x-7) + 1 = 1.$$

  f ist also in 7 stetig.

- Zur Stelle $7 + \frac{\pi}{2}$:
  Es gilt

$$\lim_{x\to (7+\frac{\pi}{2})-} f(x) = \lim_{x\to (7+\frac{\pi}{2})-} \tan(x-7) + 1 = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \tan(x) = \infty.$$

  f ist also in $7 + \frac{\pi}{2}$ nicht stetig.

- Zur Stelle 11:
  Es gilt

$$\lim_{x\to 11-} f(x) = \lim_{x\to 11-} x^3 - 30x2 + 300x - 1000 = 1 \text{ und}$$

$$f(11) = 2.$$

  f ist also in 11 nicht stetig.

Fazit: f ist genau auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 7 + \frac{\pi}{2}, 11\}$ stetig.

b) Offenbar gilt für $x \in (4,7)$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-6) & \text{falls } x \in (4,6)\,, \\ x-6 & \text{falls } x \in [6,7)\,. \end{cases}$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{1,4,6,7,7+\frac{\pi}{2},11\}$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} & \text{falls } x \in (-\infty,1)\,, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{falls } x \in (1,4)\,, \\ -1 & \text{falls } x \in (4,6)\,, \\ 1 & \text{falls } x \in (6,7)\,, \\ \frac{1}{\cos(x)^2} & \text{falls } x \in (7, 7+\frac{\pi}{2})\,, \\ 3x^2 - 60x + 300 & \text{falls } x \in [7+\frac{\pi}{2}, 11)\,, \\ -4(x-12)^3 & \text{falls } x \in (11,\infty) \end{cases}.$$

In den Punkten $1, 7 + \frac{\pi}{2}, 11$ ist f nicht stetig, also erst recht nicht differenzierbar.

Wir untersuchen nun die Stelle 4, 6 und 7.

- Zur Stelle 4:
  Es gilt

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt{4-h} - 2}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt{4-h} - \sqrt{4}}{h} = (\sqrt{\cdot})'(4) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\cdot}}(4) = \frac{1}{4} \text{ und}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|(4+h)-6|-2}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-h}{h} = -1.$$

Also existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ nicht; damit ist f in 4 nicht differenzierbar.

- Zur Stelle 6:
  Es gilt

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(6+h)-f(6)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|6+h-6|-0}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1. \text{ und}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(6+h)-f(6)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|6+h-6|-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1.$$

  Also existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(6+h)-f(6)}{h}$ nicht; damit ist f in 6 nicht differenzierbar.

- Zur Stelle 7:
  Es gilt

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(7+h)-f(7)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|(7+h)-6|-1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h}{h} = 1 \text{ und}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(7+h)-f(7)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\tan(7+h-7)+1-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\tan(h)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{1}{\cos(h)} = 1 \cdot 1 = 1.$$

  Also existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(7+h)-f(7)}{h}$. Damit ist f in 7 differenzierbar und es gilt

$$f'(7) = \lim_{h\to 0} \frac{f(7+h)-f(7)}{h} = 1.$$

Fazit: f ist genau auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 4, 6, 7+\frac{\pi}{2}, 11\}$differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(x^2+1)^2} & \text{falls } x \in (-\infty, 1)\,, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{falls } x \in (1, 4)\,, \\ -1 & \text{falls } x \in (4, 6)\,, \\ 1 & \text{falls } x \in (6, 7)\,, \\ 1 & \text{falls } x = 7\,, \\ \frac{1}{\cos(x)^2} & \text{falls } x \in (7, 7+\frac{\pi}{2})\,, \\ 3x^2 - 60x + 300 & \text{falls } x \in [7+\frac{\pi}{2}, 11)\,, \\ -4(x-12)^3 & \text{falls } x \in (11, \infty)\,. \end{cases}$$

c) Wir untersuchen zuerst alle Stellen, in denen f differenzierbar ist. Dort kann f nur dann ein lokales Extremum haben, wenn f' an der enstprechenden Stelle verschwindet. Deshalb bestimmen wir nun die Nullstellen der Ableitung.

Es gilt

$$\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \iff x = 0 \text{ und}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0,\ -1 \neq 0,\ 1 \neq 0,\ \frac{1}{\cos(x)^2} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und}$$

$$3x^2 - 60x + 300 = 0 \iff (x-10)^2 = 0 \iff x = 10 \text{ und}$$

$$4(x-12)^3 = 0 \iff x = 12.$$

Man überlegt sich leicht, daß 0, 10 und 12 tatsächlich (die einzigen) Nullstellen der Ableitung sind.

- Zur Stelle 0:
  Wir untersuchen nun die Stelle 0. In einer geeigneten Umgebung von 0 ist f' differenzierbar und es gilt dort
  $$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}.$$
  Also gilt $f''(0) = 2$.
  Also hat f in 0 ein lokales Minumum.
- Zur Stelle 10:
  In einer geeigneten Umgebung von 10 ist f' differenzierbar und es gilt dort
  $$f''(x) = 6x - 60.$$
  Also gilt $f''(10) = 0$.
  In einer geeigneten Umgebung von 10 ist auch f'' differenzierbar und es gilt dort
  $$f'''(x) = 6$$
  und insbesondere $f'''(10) = 6$.
  3 ist ungerade, deshalb hat f in 10 kein lokales Extremum (sondern einen Wendepunkt).
- Zur Stelle 12:
  In einer geeigneten Umgebung von 12 ist f' differenzierbar und es gilt dort
  $$f''(x) = -12(x-12)^2.$$
  Also gilt $f''(12) = 0$.
  In einer geeigneten Umgebung von 12 ist auch f'' differenzierbar und es gilt dort
  $$f'''(x) = -24(x-12).$$
  Also gilt $f'''(12) = 0$.
  In einer geeigneten Umgebung von 12 ist auch f''' differenzierbar und es gilt dort
  $$f^{(4)}(x) = -24$$
  und insbesondere $f^{(4)}(12) = -24$.
  4 ist gerade, deshalb hat f in 12 ein lokales Extremum. Wegen $f^{(4)} < 0$ handelt es sich dabei um ein Maximum.

Wir untersuchen nun noch die Stellen, in denen f nicht differenzierbar ist.

- Zur Stelle 1:
  Wegen $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}$ gibt es in jeder Umgebung von 1 ein x mit $f(x) < 1 = f(1)$. Außerdem sieht man mittels der Ableitung leicht ein, daß f auf $[1,4]$ streng monton wachsend ist. Also gibt es in jeder Umgebung von 1 auch ein x mit $f(x) > f(1)$. Also hat f in 1 kein lokales Extremum.
- Zur Stelle 4:
  Mittels der Ableitung sieht man leicht ein, daß f auf $[1,4]$ streng monton wachsend und auf $[4,6)$ streng monton fallend ist. Also hat f in 4 ein lokales Maximum.
- Zur Stelle 6:
  Mittels der Ableitung sieht man leicht ein, daß f auf $[4,6]$ streng monton fallend und auf $[6,7)$ streng monton wachsend ist. Also hat f in 6 ein lokales Minimum.

- Zur Stelle $7 + \frac{\pi}{2}$:
  Wegen $\lim\limits_{x \to (7+\frac{\pi}{2})-} f(x) = \infty$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, daß

  $$f(x) > f(7 + \frac{\pi}{2}) \text{ für alle } x \in (7 + \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon, 7 + \tfrac{\pi}{2})) \text{ gilt.}$$

  Außerdem sieht man mittels der Ableitung leicht ein, daß f auf $[7+\frac{\pi}{2}, 11]$ streng monton steigend ist. Also hat f in $7 + \frac{\pi}{2}$ ein lokales Minimum.
- Zur Stelle 11:
  Wegen $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}$ gibt es in jeder Umgebung von 1 ein x mit $f(x) < 1 = f(1)$. Außerdem sieht man mittels der Ableitung leicht ein, daß f auf $[11, 12)$ streng monton wachsend ist. Also gibt es in jeder Umgebung von 11 auch ein x mit $f(x) > f(11)$. Also hat f in 11 kein lokales Extremum.

d) Wegen $\lim\limits_{x \to (7+\frac{\pi}{2})-} f(x) = \infty$ ist f nach oben unbeschränkt und besitzt also kein Maximum.

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 3 - (x-12)^4 = -\infty$ ist f nach unten unbeschränkt und besitzt also kein Minimum.

e) f ist auf $[7, 7 + \frac{\pi}{2})$ stetig. Wegen $f(7) = 1$ und $\lim\limits_{x \to (7+\frac{\pi}{2})-} f(x) = \infty$ nimmt f nach dem Zwischenwertsatz also alle Werte aus $(1, \infty)$ an.

Außerdem ist f auf $[12, \infty)$ stetig. Wegen$f(12) = 3$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ nimmt f nach dem Zwischenwertsatz also auch alle Werte aus $(-\infty, 3)$ an.

Insgesamt folgt, daß f alle Werte aus $\mathbb{R}$ annimmt. Damit ist f surjektiv.

f) f ist nicht injektiv, denn es gilt $f(1) = 1 = f(5)$.

g) Für alle $x \in [1, 7]$ gilt

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{falls } x \in [1, 4]\,, \\ -(x-6) & \text{falls } x \in (4, 6)\,, \\ x - 6 & \text{falls } x \in [6, 7)\,, \\ 1 & \text{falls } x = 7\,. \end{cases}$$

f ist also nur an endlich vielen Stelle unstetig und dort existieren jeweils die einseitigen Grenzwerte. Damit ist f auf $[1, 7]$ integrierbar und es gilt

$$\int_1^7 f(x)\,dx = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx + \int_4^6 -(x-6)\,dx + \int_6^7 x - 6\,dx =$$

$$[\frac{2}{3}x^{3/2}]_{x=1}^{x=4} + [-\frac{1}{2}x^2 + 6x]_{x=4}^{x=6} + [\frac{1}{2}x^2 - 6x]_{x=6}^{x=7} = \frac{43}{6}.$$

h) Auf $[1, 7]$ ist f integrierbar.
Damit existiert $\int_1^{7+\pi/2} f(x)\,dx$ genau dann, wenn $\int_7^{7+\pi/2} f(x)\,dx = \int_7^{7+\pi/2} \tan(x-7) + 1\,dx$ existiert.
Sei $\beta \in (7, 7 + \pi/2)$. Dann gilt mittels der Substitution $t := x - 7$

$$\int_7^\beta \tan(x-7) + 1\,dx = \int_7^\beta \tan(x-7)\,dx + \int_7^\beta 1\,dx = \int_0^{\beta-7} \tan(t)\,dt + \beta - 7 =$$

$$[-\ln(\cos x)]_{x=0}^{x=\beta-7} + \beta - 7 = -\ln(\cos(\beta - 7)) + \beta - 7 \overset{\beta\to 7+\pi/2-}{\longrightarrow} \infty.$$

Also existiert das uneigentliche Integral nicht.

i) Es gilt $g'(x) = 3x^2 - 60x + 300 = 3(x-10)^2$ auf $(9,11)$. Also ist g auf $(9,10)$ und $(10,11)$ streng monoton wachsend. Wie bei Aufgabe 1 vom 13 Übungsblatt erhält man jeweils auch strenge Monotonie auf $(9,10]$ und $[10,11)$. Also ist g auf $(9,11)$ streng monoton wachsend.

j) g ist stetig und es gilt $g(9) = -1$, $g(11) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt damit g alle Werte aus $(9,11)$ an. Da g streng monoton wachsend ist, ist das genau das Bild von g.

k) g ist streng monoton wachsend, also injektiv. Außerdem ist nach Definition $f(9,11) = g(9,11)$, also ist g auch surjektiv. g ist also bijektiv.

l) g ist bijektiv und differenzierbar. Nach dem Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion ist g^{-1} genau dort differenzierbar, wo g' nicht verschwindet. Das ist auf $(9,11)\setminus\{10\}$ der Fall. Aus dem genannten Satz erhalten wir zudem

$$(g^{-1})'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right)} = \frac{1}{g'\left(\frac{21}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Bemerkung: f läßt sich wie folgt skizzieren: