Wiederholung: Konvergenz von Reihen

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zu $N \in \mathbb{N}$ setze $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$.

Die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ heißt (*unendliche*) *Reihe* und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent*, falls die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim\limits_{N\to\infty} s_N$ der *Reihenwert* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und wird bezeichnet mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim\limits_{N\to\infty} s_N$.

Satz: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
D.h.: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definition: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\implies$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Untersuchung von Reihen auf Konvergenz:

- Berechne die Folge der Partialsummen (s_N) und prüfe, ob (s_N) konvergiert.
- Benutze Konvergenzkriterien für Reihen:

  Leibnizkriterium für alternierende Reihen
  Sei (b_n) eine *monoton fallende* Folge mit $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

  Majoranten- und Minorantenkriterium
  Seien (a_n) und (b_n) Folgen.

  (1) Gilt $|a_n| \le b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
  (2) Gilt $a_n \ge b_n \ge 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

  Quotientenkriterium
  Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ für n mit $a_n \neq 0$.

  (1) Ist $\vartheta \in (0,1)$ und gilt $c_n \le \vartheta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
  (2) Ist $c_n \ge 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

  Wurzelkriterium
  Sei (a_n) eine Folge.

  (1) Ist $\vartheta \in (0,1)$ und gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \le \vartheta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
  (2) Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

  Spezialfall, der bei der Untersuchung auf Konvergenz bzw. Divergenz meist ausreicht:
  Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiere $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| =: \vartheta$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: \vartheta$. Dann gilt:

  Im Fall $\vartheta < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

  Im Fall $\vartheta = 1$ ist keine Aussage möglich.

  Im Fall $\vartheta > 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.