Beispiel für ein divergentes Cauchy-Produkt

Gemäß Vorlesung konvergiert das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *zweier konvergenter Reihen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$*, wenn mindestens eine der beiden zuletzt genannten Reihen absolut konvergiert. Wir geben hier ein Beispiel dafür, dass man auf die Voraussetzung der absoluten Konvergenz im allgemeinen nicht verzichten kann. Dazu werden wir eine konvergente Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *angeben, deren Cauchyprodukt mit sich selbst divergiert.*

Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir $\alpha_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ und $a_n := (-1)^n \alpha_n$.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil (α_n) eine monoton fallende Nullfolge ist (Nachweis der Monotonie: $1 \le 2 \Rightarrow n+1 \le n+2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} \le \frac{1}{n+1} \Rightarrow \alpha_{n+1} \le \alpha_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$).

Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}}.$$

Mit

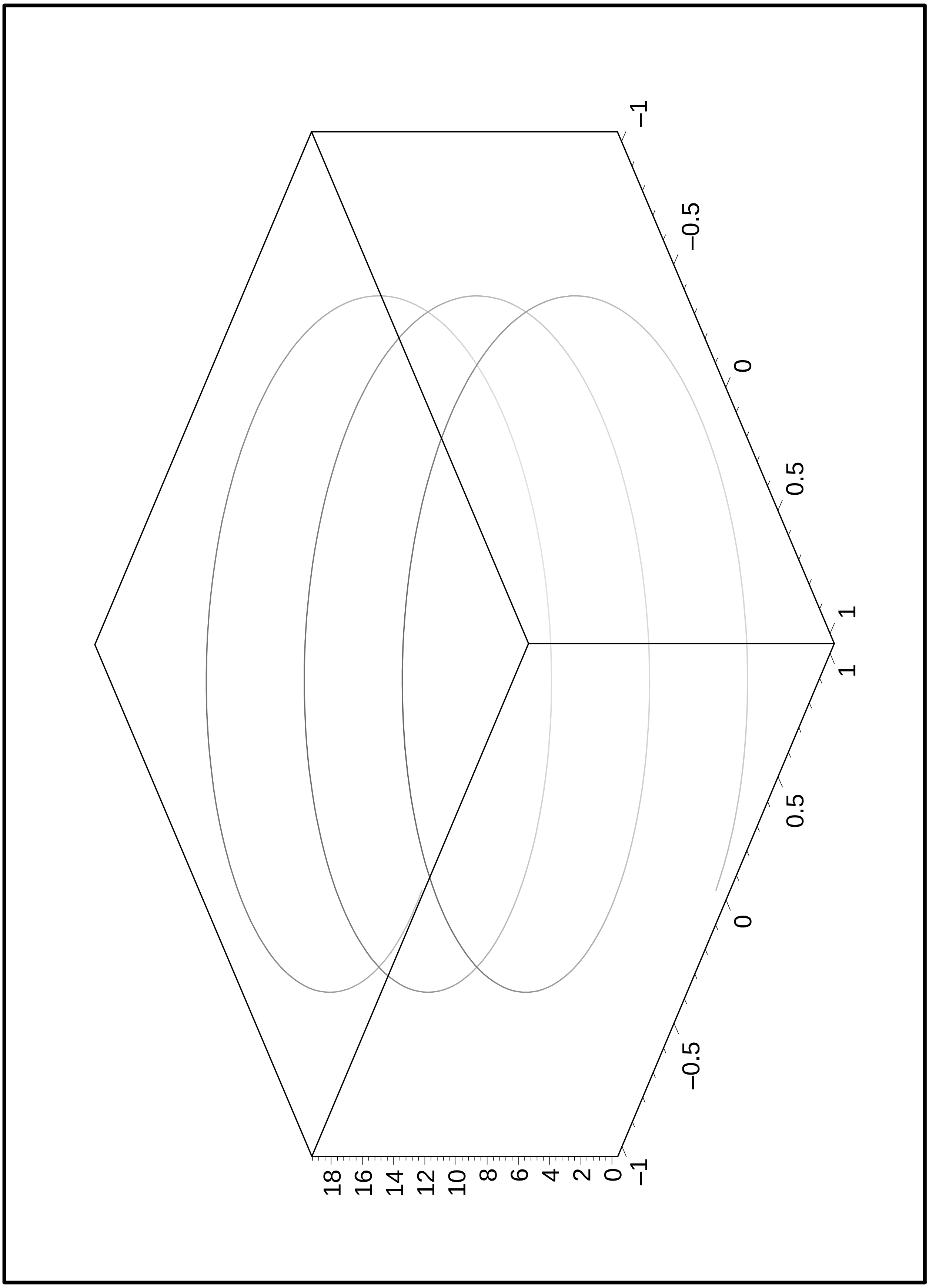
$$0 \le (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a}\,\sqrt{b} \le \tfrac{1}{2}(a+b) \qquad (\text{für } a, b > 0)$$

folgt

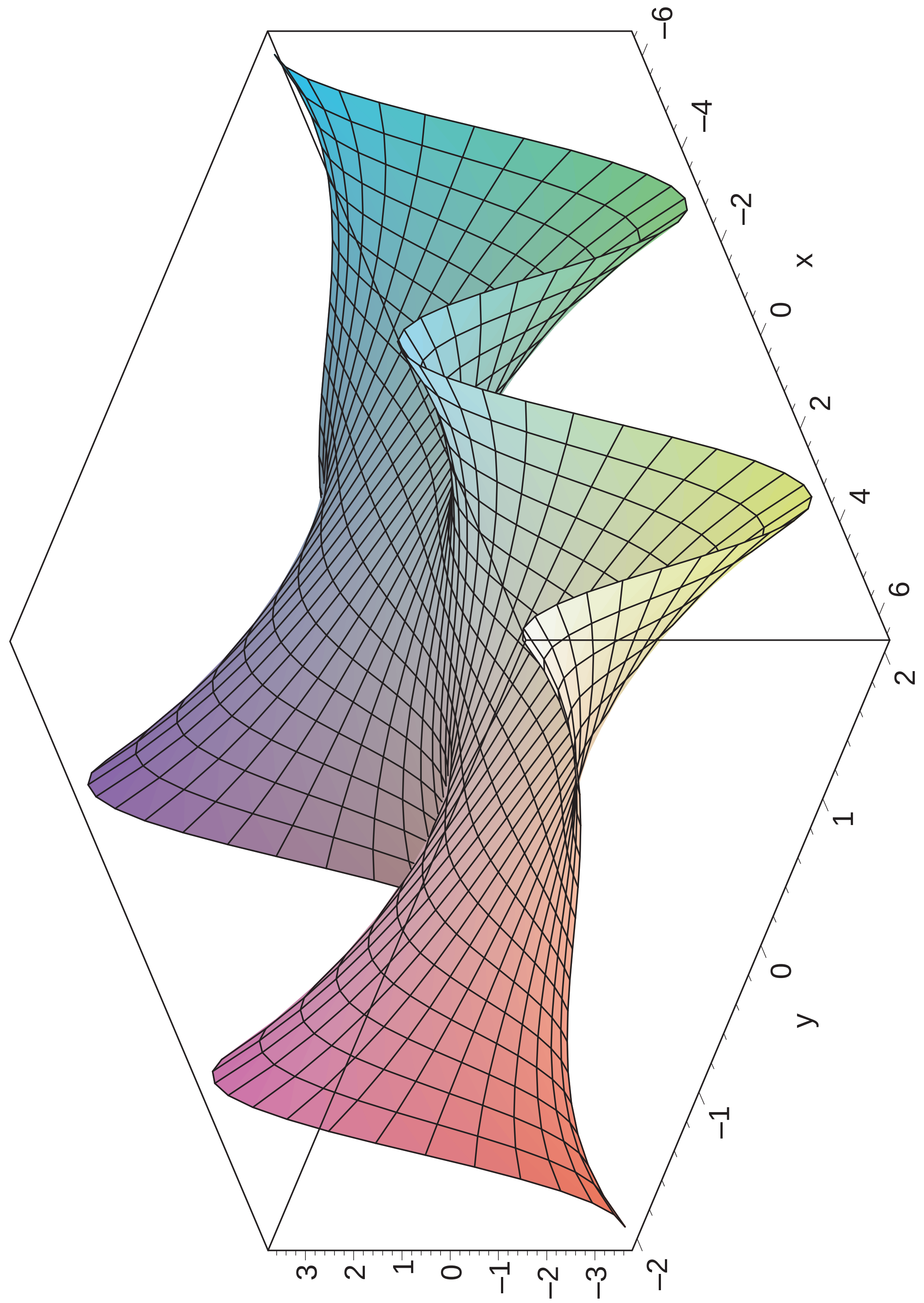
$$\begin{aligned} |c_n| &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}} \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2+2/n}{1+2/n} \to 2 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Demnach ist (c_n) keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

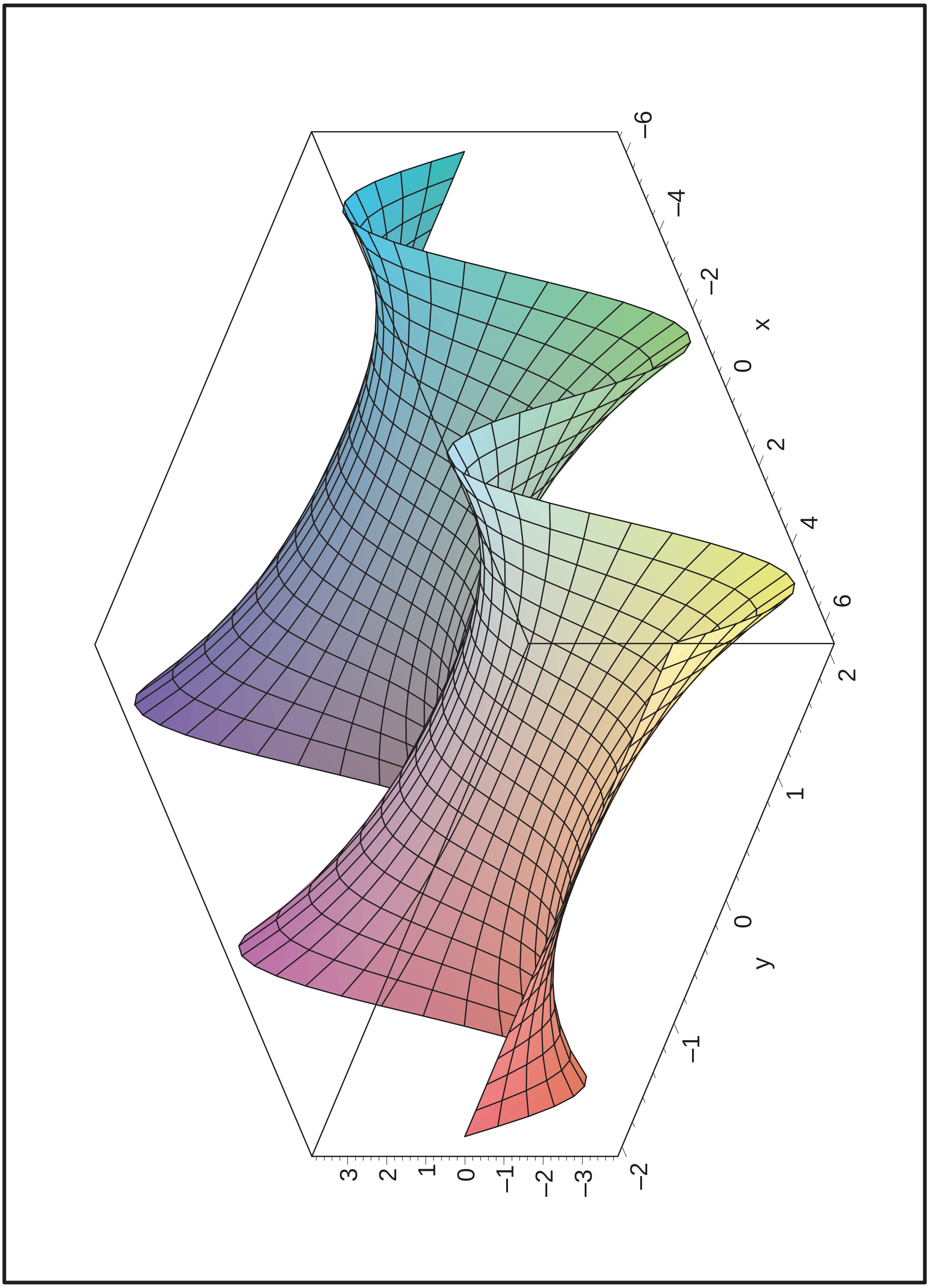
Graph der komplexen Exponentialfunktion entlang der imaginären Achse



Graph des Imaginärteils der komplexen Sinus-Funktion



Graph des Realteils der komplexen Sinus-Funktion



Erläuterungen

Die Schaubilder zeigen Teile von

$$\text{graph}(\exp) = \{\, (z, \exp(z)) : z \in \mathbb{C} \,\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4 \text{ und}$$

$$\text{graph}(\sin) = \{\, (z, \sin(z)) : z \in \mathbb{C} \,\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4.$$

Die Schaubilder wurden mit Maple erzeugt, und zwar mittels

```
with(plots);
plotsetup(ps, plotoutput=‘plotname.ps‘, plotoptions=‘color‘);
```

(oder andere plotoptions)

und dem jeweils angegebenen Befehl.

Graph der komplexen Exponentialfunktion entlang der imaginären Achse

Das Schaubild zeigt die Menge $\{\, (y, \exp(iy) : y \in \mathbb{R} \,\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^3$.

Dabei ist y auf der Hochachse abgetragen und Real- und Imaginärteil von $\exp(iy)$ auf den beiden anderen Achsen.

Plot mit Maple:

```
spacecurve([Re(exp(I*y)),Im(exp(I*y)),y],y=0..3*2*Pi,axes=boxed,numpoints=500);
```

Graph des Imaginärteils der komplexen Sinus-Funktion

Das Schaubild zeigt die Menge $\{\, (z, \text{Im}(\sin(z)) : z \in \mathbb{C} \,\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$.

Dabei ist $z = x + iy$ in der (x, y)-Ebene abgetragen und $\text{Im}(\sin(z))$ auf der Hochachse.

Plot mit Maple:

```
plot3d(Im(sin(x+I*y)),x=-2*Pi..2*Pi,y=-2..2,axes=boxed,grid=[50,20]);
```

Graph des Realteils der komplexen Sinus-Funktion

Das Schaubild zeigt die Menge $\{\, (z, \text{Re}(\sin(z)) : z \in \mathbb{C} \,\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$.

Dabei ist $z = x + iy$ in der (x, y)-Ebene abgetragen und $\text{Re}(\sin(z))$ auf der Hochachse.

Plot mit Maple:

```
plot3d(Re(sin(x+I*y)),x=-2*Pi..2*Pi,y=-2..2,axes=boxed,grid=[50,20]);
```

Abschätzungen für $\cos x$ mittels Partialsummen

grün:	$x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$
rot:	$x \mapsto \cos x$
blau:	$x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$