Beispiel zu Umkehrfunktionen des Sinus

Die Funktion $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $x \mapsto \sin(x)$ besitzt die Umkehrfunktion $f^{-1} = \text{Arcsin}$ (*Hauptzweig des Arcussinus*).

Wir betrachten die beiden Funktionen

$g\colon \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right] \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)$ und

$h\colon \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi\right] \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)$.

Wir konstruieren nun die Umkehrfunktionen g^{-1} und h^{-1} mit Hilfe des Hauptzweigs $f^{-1} = \text{Arcsin}$.

Die Funktion g geht aus f durch Verschieben um 2π nach rechts hervor, h durch Spiegeln an der Geraden $x = -\frac{\pi}{2}$. Da f bijektiv ist, sind es g und h auch. Deshalb existieren g^{-1} und h^{-1}.

Für jedes $x \in [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$ gilt aufgrund der 2π-Periodizität des Sinus

$$y := g(x) = \sin x = \sin(\underbrace{x - 2\pi}_{\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}) = f(x - 2\pi).$$

Daher sind $x = g^{-1}(y)$ und $x - 2\pi = f^{-1}(y)$, woraus $g^{-1}(y) = f^{-1}(y) + 2\pi$ folgt. Also

$$g^{-1}\colon [-1,1] \to [\tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{5}{2}\pi], \quad y \mapsto \text{Arcsin}(y) + 2\pi.$$

Für $x \in [-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ erhalten wir

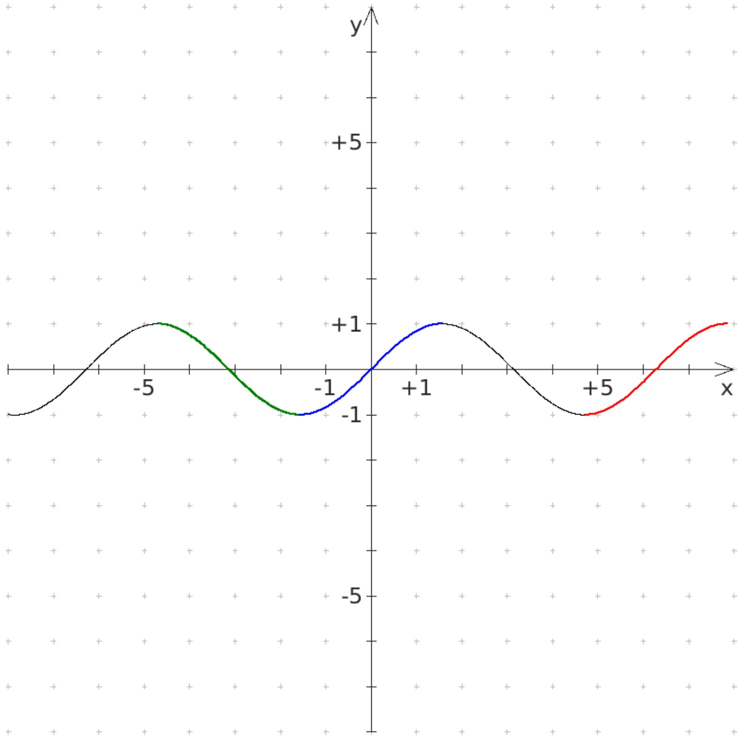
$$y := h(x) = \sin x \overset{(*)}{=} -\sin(\underbrace{\ x + \pi\ }_{\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}) = -f(x + \pi).$$

[Die Gleichheit in $(*)$ folgt aus geometrischen Überlegungen oder mit Hilfe des Additionstheorems: $\sin(x+\pi) = \sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi) = -\sin x$.] Also ist einerseits $x = h^{-1}(y)$ und andererseits $x + \pi = f^{-1}(-y)$. Zusammen folgt $h^{-1}(y) = f^{-1}(-y) - \pi = -f^{-1}(y) - \pi$, weil f^{-1} eine ungerade Funktion ist, denn für $y = f(x)$ gilt $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) \overset{f \text{ ungerade}}{=} f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$. Also ist die Umkehrfunktion zu h gegeben durch

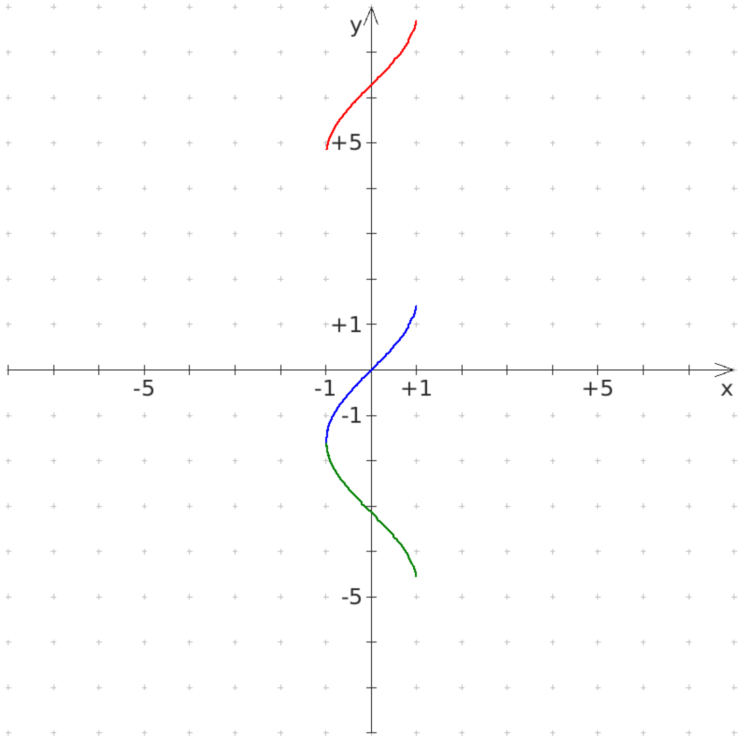
$$h^{-1}\colon [-1,1] \to [-\tfrac{3}{2}\pi, -\tfrac{1}{2}\pi], \quad y \mapsto -\text{Arcsin}(y) - \pi.$$

Schaubilder: siehe nächste Seite.

Schaubilder von f (blau), g (rot), h (grün) (schwarz: $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$)



Schaubilder von f^{-1} (blau), g^{-1} (rot), h^{-1} (grün)



Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus

Die Funktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind definiert durch

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,, \qquad \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,.$$

Wir werden die folgenden Eigenschaften der beiden Funktionen zeigen.

1. Potenzreihenentwicklung um 0:

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

2. Formeln (für alle $x, y \in \mathbb{R}$)

   i) $\cosh(-x) = \cosh(x)\,; \quad \sinh(-x) = -\sinh(x)\,;$

   ii) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\,;$

   iii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\,\cosh(y) + \sinh(x)\,\sinh(y)\,;$
   $\sinh(x+y) = \sinh(x)\,\cosh(y) + \cosh(x)\,\sinh(y)\,.$

3. Monotonie und asymptotisches Verhalten:

   - Auf $(-\infty, 0]$ ist die Funktion cosh streng monoton fallend.
     Auf $[0, \infty)$ ist die Funktion cosh streng monoton wachsend.
   - Die Funktion sinh ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

4. Umkehrfunktionen von cosh und sinh: Areacosinus und Areasinus.

5. Zusammenhang zwischen cosh (und sinh) und cos und sin: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh(x) = \cos(ix)\,,$$

$$\sinh(x) = -i\sin(ix)\,.$$

6. Schaubilder.

Zu 1.) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sind die Potenzreihen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k \qquad \text{und} \qquad e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k$$

(absolut) konvergent, daher konvergieren nach Satz 3 in 8.2 auch deren Summe bzw. Differenz:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\,\frac{1}{2}\big(1+(-1)^k\big)\, x^k\right) \overset{n=2k}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,,$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\,\frac{1}{2}\big(1-(-1)^k\big)\, x^k\right) \overset{n=2k+1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihen ∞.

Zu 2.) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

i)

$$\cosh(-x) = \tfrac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \cosh x\,; \quad \sinh(-x) = \tfrac{1}{2}(e^{-x} - e^{-(-x)}) = -\sinh x\,;$$

(d.h. cosh ist eine gerade und sinh eine ungerade Funktion)

ii)

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \big(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\big)^2 - \big(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\big)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\big((e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})\big) = \tfrac{1}{4}\,4e^0 = 1\,;\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\cosh(x)\,\cosh(y) + \sinh(x)\,\sinh(y) &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,\tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,\tfrac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}) + \tfrac{1}{4}(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)}) = \cosh(x+y)\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x)\,\cosh(y) + \cosh(x)\,\sinh(y) &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,\tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,\tfrac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}) + \tfrac{1}{4}(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) = \sinh(x+y)\,.\end{aligned}$$

Zu 3.) Beh.: Auf $[0, \infty)$ ist die Funktion cosh streng monoton wachsend. Für alle $0 \le x < y$ gilt $e^x \ge 1$ und $e^y > 1$ und somit $\frac{1}{e^x e^y} < 1$. Außerdem ist $e^y - e^x > 0$. Daraus ergibt sich dann $\frac{e^y - e^x}{e^x e^y} < e^y - e^x$ bzw. $e^{-x} - e^{-y} < e^y - e^x$ bzw. $e^x + e^{-x} < e^y + e^{-y}$, d.h. $\cosh(x) < \cosh(y)$.

Beh.: Auf $(-\infty, 0]$ ist die Funktion cosh streng monoton fallend. Dies folgt aus 2.i) zusammen mit dem eben Gezeigten. Für alle $x < y \le 0$ gilt nämlich

$$\cosh(x) - \cosh(y) \overset{2.\mathrm{i})}{=} \cosh(-x) - \cosh(-y) \overset{0 \le -y < -x}{>} 0\,.$$

Beh: Die Funktion sinh ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dies ergibt sich aus der Monotonie von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$. Ist nämlich $x < y$, so haben wir $e^x < e^y$ und $e^{-y} < e^{-x}$ wegen $-y < -x$. Daraus folgt $e^x + e^{-y} < e^y + e^{-x}$ bzw. $e^x - e^{-x} < e^y - e^{-y}$, also $\sinh(x) < \sinh(y)$.

Wegen $e^x \to \infty$ $(x \to \infty)$ und $e^{-x} \to 0$ $(x \to \infty)$ sind

$$\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \infty\,.$$

Wegen $e^x \to 0$ $(x \to -\infty)$ und $e^{-x} \to \infty$ $(x \to -\infty)$ sind

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty\,.$$

Zu 4.) Da $\cosh(0) = 1$ und cosh auf $[0,\infty)$ monoton wachsend ist, gilt $\cosh([0,\infty)) \subset [1,\infty)$. Aus $\cosh(0) = 1$, $\cosh(2n) > \frac{e^{2n}}{2} > \frac{2n}{2} = n$ und der Stetigkeit von cosh folgt nach dem Zwischenwertsatz $[1,n] \subset \cosh([0,\infty))$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$[1,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [1,n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \cosh([0,\infty)) = \cosh([0,\infty))\,.$$

Insgesamt haben wir $\cosh([0,\infty)) = [1,\infty)$ gezeigt.

Da die Funktion cosh auf $[0,\infty)$ streng monoton ist, besitzt cosh auf $[0,\infty)$ eine Umkehrfunktion $\cosh([0,\infty)) \to [0,\infty)$. Zu deren Bestimmung lösen wir die Gleichung $y = \cosh(x)$, wobei $x \in [0,\infty)$ und $y \in \cosh([0,\infty)) = [1,\infty)$, nach x auf

$$\begin{aligned} y = \cosh(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \overset{|\cdot 2e^x}{\Leftrightarrow} \quad 2e^x y = e^{2x} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2e^x y = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2e^x y + y^2 = -1 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x - y)^2 = y^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |e^x - y| = \sqrt{y^2 - 1}\,. \end{aligned}$$

Wegen $e^x = \frac{1}{2}(e^x + e^x) \geq \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x) = y$ f"ur $x \geq 0$ ist dies äquivalent zu

$$e^x - y = \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\bigl(y + \sqrt{y^2 - 1}\,\bigr)\,.$$

Daher ist die Umkehrfunktion von $\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$ gegeben durch $[1,\infty) \to [0,\infty), y \mapsto \ln\bigl(y + \sqrt{y^2 - 1}\,\bigr)$. Diese nennt man *Areacosinus* und schreibt Arcosh.

Auch auf $(-\infty,0]$ ist cosh streng monoton, so dass es eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $\cosh((-\infty,0]) \to (-\infty,0]$ gibt. Es ist $\cosh((-\infty,0]) = [1,\infty)$. Wie zuvor erhalten wir für $x \leq 0$ und $y \geq 1$ (Diesmal ist $e^x = \frac{1}{2}(e^x + e^x) \leq \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x) = y$)

$$\begin{aligned} y = \cosh(x) \quad &\Leftrightarrow \quad |e^x - y| = \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad -(e^x - y) = \sqrt{y^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\bigl(y - \sqrt{y^2 - 1}\,\bigr)\,. \end{aligned}$$

Also hat $\cosh\colon (-\infty,0] \to [1,\infty)$ die Umkehrfunktion $[1,\infty) \to (-\infty,0], y \mapsto \ln\bigl(y - \sqrt{y^2 - 1}\,\bigr)$.

Da $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist und $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (Dies kann man mit einem ähnlichen Argument wie bei cosh zeigen) gilt, existiert die Umkehrfunktion von $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche mit Arsinh (*Areasinus*) bezeichnet wird. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

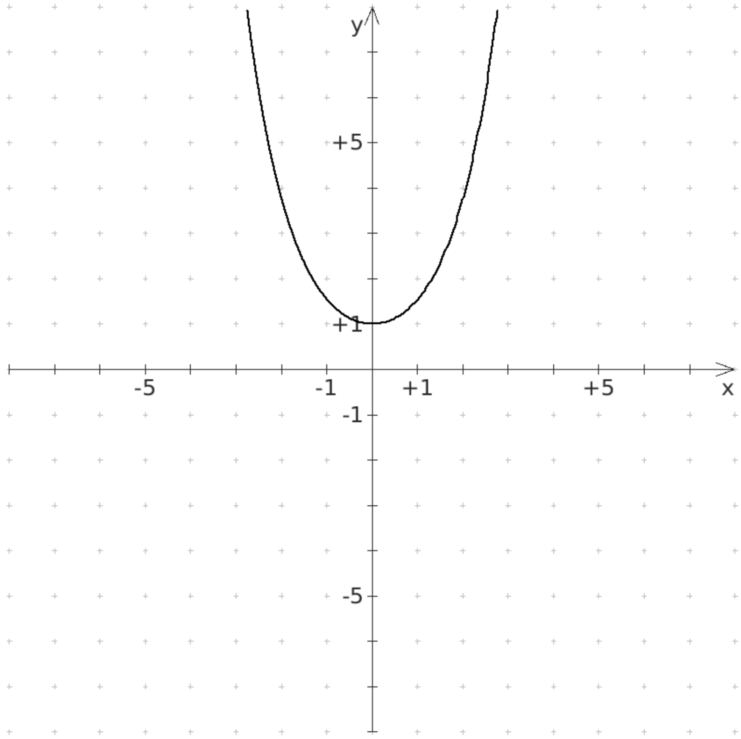
$$\begin{aligned} y = \operatorname{Arsinh} x \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \sinh y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = e^y - e^{-y} \\ &\overset{e^y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad 2xe^y = e^{2y} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (e^y)^2 - 2xe^y + x^2 = x^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (e^y - x)^2 = x^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad |e^y - x| = \sqrt{x^2 + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \ \text{ oder } \ e^y = \underbrace{x - \underbrace{\sqrt{x^2 + 1}}_{>|x|\geq x}}_{<x-x=0} \\ &\overset{e^y > 0}{\Longleftrightarrow} \quad e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 + 1}\,\bigr)\,. \end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 + 1}\,\bigr)$ die Umkehrfunktion von $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

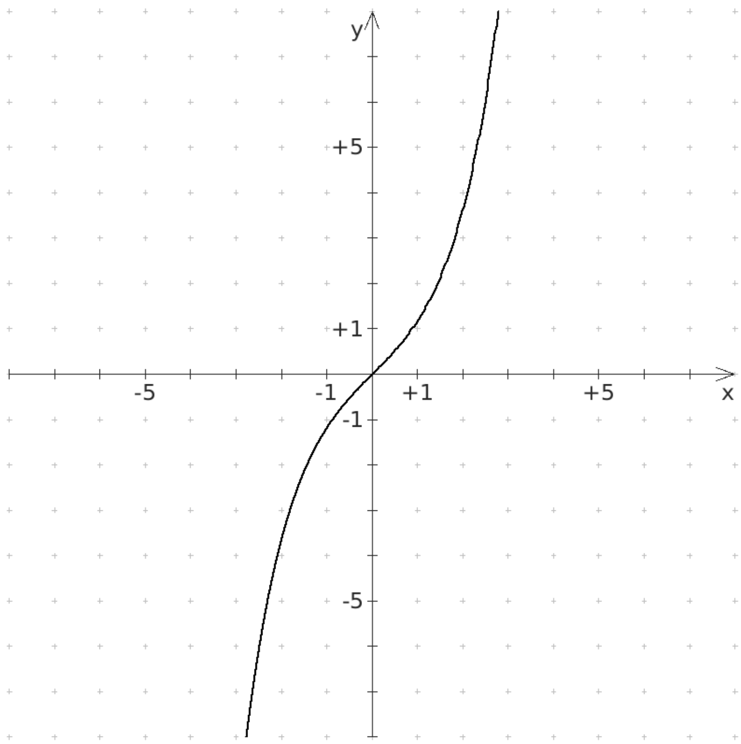
Zu 5.) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \tfrac{1}{2}(e^{-i(ix)} + e^{i(ix)}) = \cos(ix)\,, \\ \sinh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = i\,\tfrac{1}{2i}(e^{-i(ix)} - e^{i(ix)}) = -i\sin(ix)\,. \end{aligned}$$

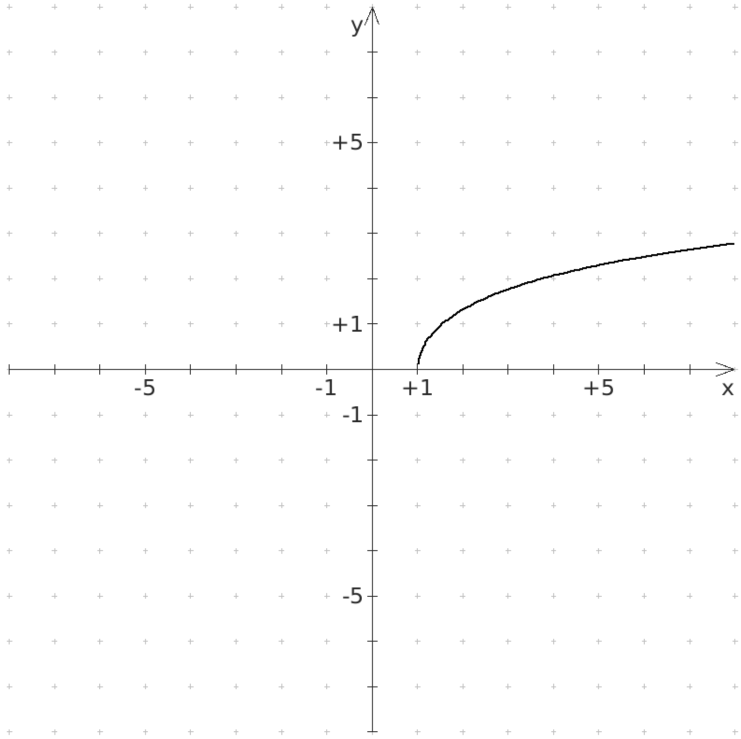
Zu 6.) **Cosinus hyperbolicus** (cosh)



Sinus hyperbolicus (sinh)



Areacosinus (Arcosh)



Areasinus (Arsinh)