## Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus [Ergänzung]

Die Funktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind definiert durch

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,, \qquad \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,.$$

Wir werden die folgenden Eigenschaften der beiden Funktionen zeigen.

1. Potenzreihenentwicklung um 0:

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

2. Formeln (für alle $x, y \in \mathbb{R}$)

   i) $\cosh(-x) = \cosh(x)\,; \quad \sinh(-x) = -\sinh(x)\,;$

   ii) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\,;$

   iii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\,\cosh(y) + \sinh(x)\,\sinh(y)\,;$
   $\sinh(x+y) = \sinh(x)\,\cosh(y) + \cosh(x)\,\sinh(y)\,.$

3. Monotonie und asymptotisches Verhalten:

   - Auf $(-\infty, 0]$ ist die Funktion cosh streng monoton fallend.
     Auf $[0, \infty)$ ist die Funktion cosh streng monoton wachsend.
   - Die Funktion sinh ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

4. Umkehrfunktionen von $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
   Areacosinus $\operatorname{Arcosh} : [1,\infty) \to [0,\infty), y \mapsto \ln\bigl(y + \sqrt{y^2-1}\bigr)$;
   Areasinus $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \ln\bigl(y + \sqrt{y^2+1}\bigr)$

5. Zusammenhang zwischen cosh (und sinh) und cos und sin: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh(x) = \cos(ix)\,,$$

$$\sinh(x) = -i\sin(ix)\,.$$

6. Schaubilder.

7. cosh und sinh sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \text{ und}$$

$$\sinh'(x) = \cosh(x).$$

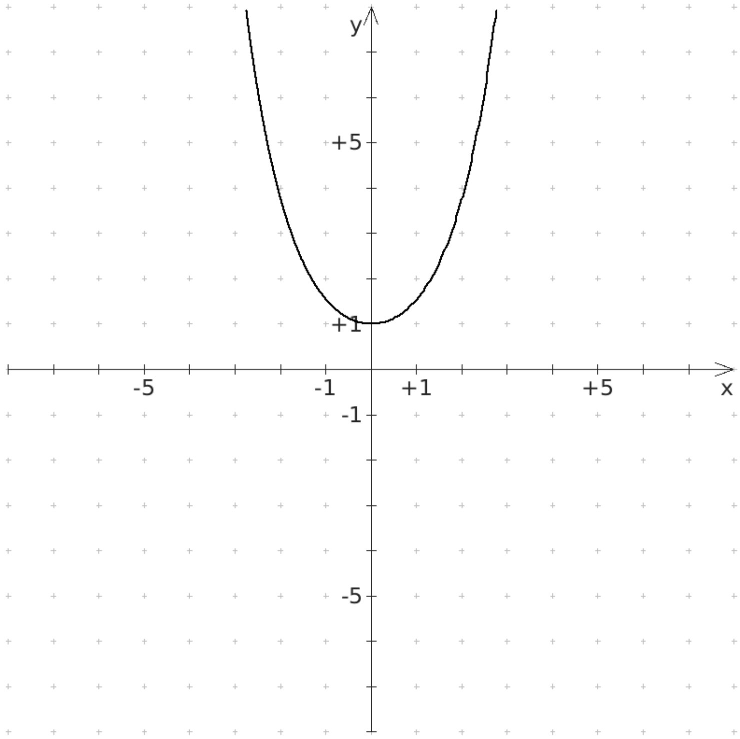
8. Areacosinus ist auf $(1,\infty)$ differenzierbar und es gilt

$$\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ für alle } x \in (1,\infty).$$

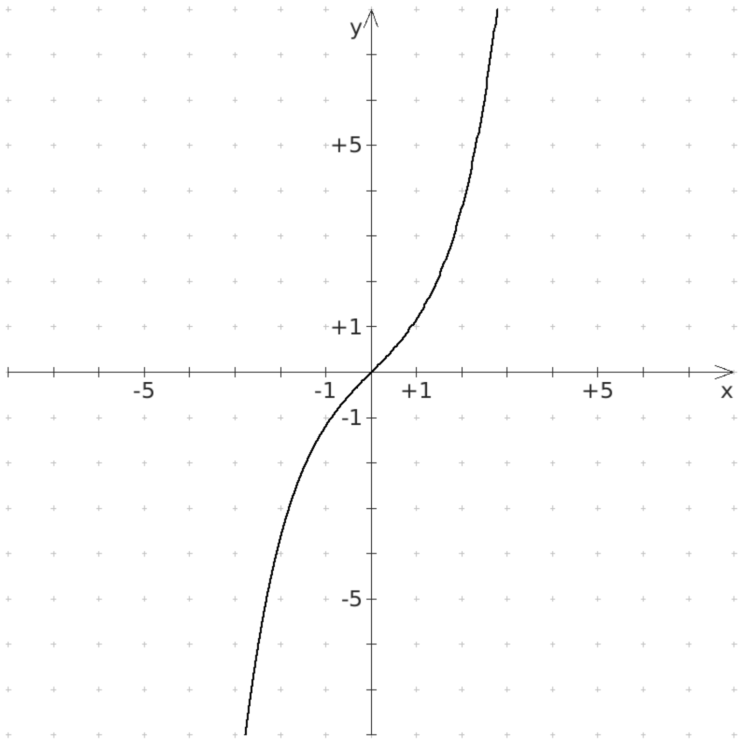
   Areasinus ist auf $R$ differenzierbar und es gilt

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

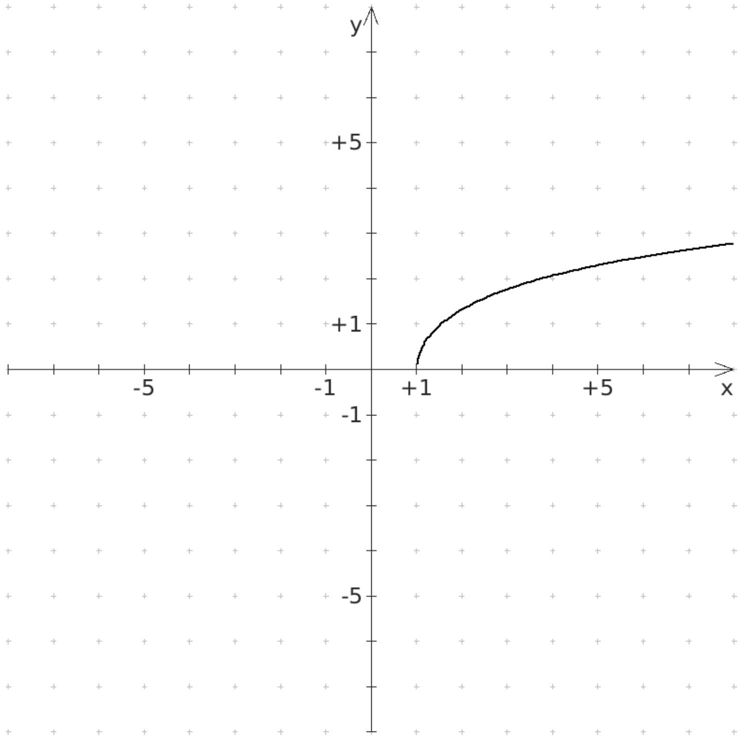
**Cosinus hyperbolicus** (cosh)



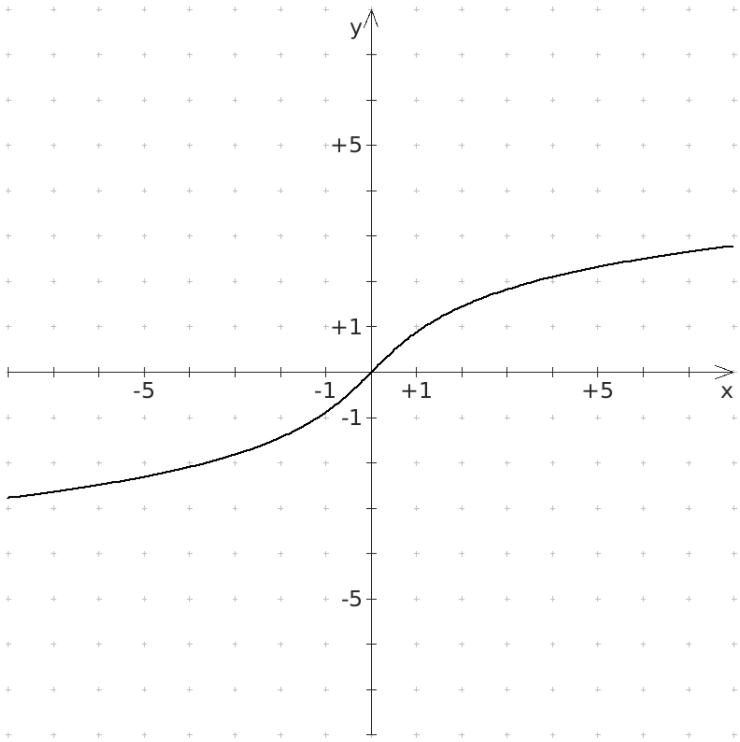

**Sinus hyperbolicus** (sinh)



**Areacosinus (**Arcosh**)**




**Areasinus (**Arsinh**)**



Bis auf 7.) und 8.) wurde bereits alles im Ergänzungsmaterial zur 10. Übung gezeigt.

Zu 7.) Nach Definition gilt $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Als Komposition differenzierbarer Funktionen sind cosh und sinh also differenzierbar. Die Kettenregel liefert

$$\cosh'(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

$$\sinh'(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Zu 8.) Wegen

$$\operatorname{Arcosh}(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2 - 1}\,\big)$$

ist Arcosh als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $(1, \infty)$ differenzierbar mit

$$\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,.$$

Alternativ kann man Arcosh$'$ auch mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen: Wegen $\cosh'(x) = \sinh(x) \neq 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ ist $\operatorname{Arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ differenzierbar und für jedes $x \in (1, \infty)$ gilt

$$\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{Arcosh} x)} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{Arcosh} x)} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{\cosh(\operatorname{Arcosh} x)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,.$$

In $(*)$ verwendeten wir $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ sowie $\sinh(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$.

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2 + 1}\,\big)$$

ist Arsinh als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\,.$$

Alternativ kann man Arsinh$'$ auch mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen: Wegen $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\operatorname{Arsinh} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh} x)} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh(\operatorname{Arsinh} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

In $(*)$ verwendeten wir wieder $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ sowie $\cosh(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$.