Liste ausgewählter Fehler bei der Übungsklausur

Zu „Skizze von $\{\, z^2 \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi \,\}$":

- Vereinzelt wurde die Menge $\{\, z \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi \,\}$ skizziert.

Zu „Skizze von $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \left|\sin\left(\frac{6x+\pi}{12} + \left|\frac{6x-\pi}{12}\right|\right)\right|$":

- Häufig wurde mittels einer Wertetabelle versucht, den Verlauf des Funktionsgraphen zu erraten (anstatt durch Auflösen der Beträge die Funktion in elementare Funktionen zur zerlegen).

Zu „$a_n = 2^{2^n-1}(1+i)$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$":

- Vereinzelt wurde der Induktionsanfang $n = 1$ statt $n = 0$ gewählt.
- Häufig wurden Potenzrechenregeln falsch (oder garnicht) angewendet.

Zu „$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$":

- Häufig wurde so argumentiert:
  $1 - \frac{1}{n^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ und $1^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$.
  Diese Argumentation ist falsch (und wurde insgesamt mit 0 Punkten bewertet), wie man am Beispiel $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ sieht.
- Vereinzelt wurde so argumentiert:
  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \implies \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \stackrel{*}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e}} = 1$.
  Diese Argumentation enthält an der Stelle $*$ eine Lücke (und gab deshalb einen Punktabzug), wie man am Beispiel $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ sieht. Ensprechende Grenzwertsätze im Zusammenhang mit $\sqrt[n]{\cdots}$ wurden in der Vorlesung auch nicht behandelt.
  Im konkreten Fall läßt sich die Lücke wie folgt schließen:
  Wegen $a_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} =: g > 0$ gilt $\frac{1}{2}g < a_n < 2g$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\sqrt[n]{\frac{1}{2}g} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ und $\sqrt[n]{2g} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ folgt daraus mit dem Sandwichtheorem $\sqrt[n]{a_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Zu „Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}$":

- Vereinzelt wurde so argumentiert:
  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-1)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n\right)$; der erste Faktor hat Konvergenzradius ∞, der zweite 1; also ist der gesuchte Konvergenzradius 1.
  Diese Argumentation enthält eine Lücke (und gab deshalb einen Punktabzug), wie man am Beispiel $1 - x = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sieht. Im konkreten Fall läßt sich die Lücke wie folgt schließen: Mit der obigen Argumentation erhält man, daß der Konvergenzradius mindestens 1 ist. Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^n = e^{x-1}$ *nullstellenfrei* ist, folgt aus $\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^n} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$, daß der Konvergenzradius auch höchstens 1 ist (wobei zu dieser Argumentation über den Vorlesungsstoff hinausgehendes Wissen über den Konvergenzradius eines Quotienten von Potenzreihen benötigt wird).
  Bemerkung: Diese Fehlerquelle entstand durch die Abweichung von der vorgesehenen Bearbeitungsreihenfolge.

Zu „Ableitung von $x^2\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{x}\right)$":

- Häufig enstanden Fehler beim Ableiten von $\frac{1}{x}$, vermutlich weil Ableitung und Integral verwechselt wurden.
  Richtig ist $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ und $\int^x \frac{1}{t}\,dt = \ln|x| + c$ (wobei $c \in \mathbb{R}$,$x \neq 0$).