Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Um den ersten Teil einzusehen, betrachten wir eine Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Die vierte und die siebte Spalte sind gleich; die entsprechenden Aussagen haben also unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B stets den gleichen Wahrheitswert, und damit ist $\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \wedge (\neg B)$ bewiesen.

Nun zum zweiten Teil: Dabei benutzen wir, dass $D \;\Leftrightarrow\; \neg\neg D$ für jede Aussage D gilt. Wir erhalten

$$\neg A \vee \neg B \;\Leftrightarrow\; \neg\neg(\neg A \vee \neg B).$$

(Um Klammern zu sparen, schreiben wir hier $\neg A \vee \neg B$ statt $(\neg A) \vee (\neg B)$; auch im folgenden lassen wir solche Klammern im Zusammenhang mit $\neg$ weg.) Aufgrund des schon bewiesenen Teils gilt:

$$\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \;\Leftrightarrow\; \neg(A \wedge B).$$

Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung gezeigt.

Es sei A die Aussage „Ich bin reich“ und B die Aussage „Ich bin glücklich“. Dann haben wir gezeigt, dass die Negation der Aussage „Ich bin reich oder glücklich“ lautet: „Ich bin arm und unglücklich“. Und wir haben gezeigt, dass die Negation der Aussage „Ich bin reich und glücklich“ lautet: „Ich bin arm oder unglücklich“.

b) Den ersten Teil der Behauptung liefert die folgende Wahrheitstafel:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Da die fünfte und die letzte Spalte gleich sind, haben die entsprechenden Aussagen unabhängig von den Wahrheitswerten von A, B und C stets den gleichen Wahrheitswert. Hiermit ist $A \wedge (B \vee C) \;\Leftrightarrow\; (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ gezeigt.

— bitte wenden —

Den zweiten Teil zeigen wir mit der gleichen Methode wie eben: Wir verwenden $D \Leftrightarrow \neg\neg D$ und das in **a)** und **b)** schon Bewiesene:

$$\begin{aligned} A \vee (B \wedge C) \;&\Leftrightarrow\; \neg\neg\big(A \vee (B \wedge C)\big) \;\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow}\; \neg\big(\neg A \wedge \neg(B \wedge C)\big) \;\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow}\; \neg\big(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)\big) \\ &\overset{\textbf{b)}}{\Leftrightarrow}\; \neg\big((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)\big) \;\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow}\; \neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg C) \\ &\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow}\; (\neg\neg A \vee \neg\neg B) \wedge (\neg\neg A \vee \neg\neg C) \;\Leftrightarrow\; (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: „Das Wetter ist schön und ich bin reich oder glücklich“ ist genau dann wahr, wenn „Das Wetter ist schön und ich bin reich“ oder „Das Wetter ist schön und ich bin glücklich“ wahr ist. Und: „Das Wetter ist schön oder ich bin reich und glücklich“ ist genau dann wahr, wenn „Das Wetter ist schön oder ich bin reich“ und „Das Wetter ist schön oder ich bin glücklich“ wahr ist.

c) Wir stellen eine Wahrheitstafel auf (die Tafel für $\Leftrightarrow$ ist aus der Vorlesung bekannt):

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$(A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$
w	w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	f	f	w	f	f
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w

Aufgabe 2

a) Die drei bekannten Tatsachen lassen sich wie folgt ausdrücken und umformen:

- $\big[(\neg C) \Rightarrow (\neg B)\big] \;\overset{\text{Vorl.}}{\Leftrightarrow}\; \big[B \Rightarrow C\big]$
- $\big[\big(B \wedge (\neg C)\big) \vee \big((\neg B) \wedge C\big)\big] \;\overset{\textbf{1c)}}{\Leftrightarrow}\; \big[B \Leftrightarrow (\neg C)\big]$
- $\big[(A \wedge C) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg C)\big)\big] \;\overset{\textbf{1c)}}{\Leftrightarrow}\; \big[A \Leftrightarrow C\big]$

b) Wir betrachten die folgende Wahrheitstafel:

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$\neg C$	$B \Leftrightarrow (\neg C)$	$A \Leftrightarrow C$
w	w	w	w	f	f	w
w	w	f	f	w	w	f
w	f	w	w	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f
f	w	w	w	f	f	f
f	w	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f
f	f	f	w	w	f	w

Nur in der dritten Zeile liefern alle drei Ausdrücke $B \Rightarrow C$, $B \Leftrightarrow (\neg C)$ und $A \Leftrightarrow C$ den Wert „wahr“; also lautet die Lösung: Anton und Chris kommen, Berta nicht.

Aufgabe 3

a) Die Aussage „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad und der Straßenbahn“ entsteht aus den beiden Teilaussagen

A : „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad.“
B : „Alle Karlsruher fahren mit der Straßenbahn.“

mittels der logischen Verknüpfung $\wedge$ (und). Negation ergibt

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B),$$

also lautet die Negation obiger Aussage

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad fährt,
oder es gibt einen Karlsruher, der nicht mit der Straßenbahn fährt“

bzw. kurz

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad oder nicht mit der Straßenbahn fährt“.

b) Es sei A die Aussage „Morgen ist schönes Wetter“ und B die Aussage „Alle Studierenden gehen in den Schlossgarten“, dann müssen wir $A \Rightarrow B$ verneinen. Es gilt:

$$\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \neg\big((\neg A) \vee B\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\neg(\neg A) \wedge (\neg B)\big) \;\Leftrightarrow\; A \wedge (\neg B).$$

Somit lautet die Negation des Satzes: „Morgen ist schönes Wetter, und es gibt einen Studierenden, der nicht in den Schlossgarten geht“.

c) Betrachten wir die drei Aussagen

$$\begin{aligned} A &: \text{„Im Kino läuft Herr der Ringe“}, \\ B &: \text{„Im Kino läuft James Bond“}, \\ C &: \text{„Ich gehe ins Kino“}, \end{aligned}$$

dann entspricht die Aussage „Ich gehe immer ins Kino, wenn Herr der Ringe oder James Bond laufen“: $(A \vee B) \Rightarrow C$. Wegen $(E \Rightarrow C) \;\Leftrightarrow\; (\neg E \vee C)$ ist

$$\neg\big((\underbrace{A \vee B}_{=E}) \Rightarrow C\big) \quad\Leftrightarrow\quad \neg\big(\neg(\underbrace{A \vee B}_{=E}) \vee C\big) \quad\Leftrightarrow\quad \big((A \vee B) \wedge \neg C\big).$$

In Worten: „Im Kino läuft ein Herr der Ringe- oder ein James Bond-Film, und ich gehe (dennoch) nicht ins Kino“.

d) Wir wollen die Aussage

$$\exists x \text{ mit } A(x) : \; B(x)$$

negieren, wobei die Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ durch

$$\begin{aligned} A(x) &: \text{„}x\text{ ist ein Mensch.“} \\ B(x) &: \text{„Mathematik macht }x\text{ keinen Spaß.“} \end{aligned}$$

gegeben sind. Wegen $\neg\big(\exists x \text{ mit } A(x)\text{: } B(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\forall x \text{ mit } A(x)\text{: } \neg B(x)\big)$ ist die Negation der ursprünglichen Aussage: „Allen Menschen macht Mathematik Spaß“.

Aufgabe 4

Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen.

a) Es gelte $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$. Um $M_1 \subset M_3$ zu zeigen, müssen wir begründen, warum jedes Element aus M_1 auch in M_3 liegt. Sei hierzu $x \in M_1$ beliebig. Wegen $M_1 \subset M_2$ liegt x auch in M_2 und aufgrund von $M_2 \subset M_3$ ist x auch in M_3 enthalten.

Da $x \in M_1$ beliebig war, haben wir eingesehen, dass jedes Element aus M_1 ebenfalls in M_3 liegt, d.h. $M_1 \subset M_3$.

b) Die Äquivalenz der drei Aussagen **i)**, **ii)**, **iii)** erhalten wir am geschicktesten aus der Implikationskette „**i)** $\Rightarrow$ **ii)** $\Rightarrow$ **iii)** $\Rightarrow$ **i)**“.

„**i)** $\Rightarrow$ **ii)**“: Es gelte $M_1 \subset M_2$. Um nun die Gleichheit der beiden Mengen $M_1 \cap M_2$ und M_1 zu zeigen, brauchen wir nur die eine Inklusion $M_1 \subset M_1 \cap M_2$ einzusehen (die umgekehrte

Inklusion gilt ohnehin). Sei dazu $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subset M_2$ ist auch $x \in M_2$. Dann ist aber x sowohl in M_1 als auch in M_2, also in $M_1 \cap M_2$.

„**ii)** $\Rightarrow$ **iii)**“: Hier müssen wir unter der Voraussetzung $M_1 \cap M_2 = M_1$ nur die Inklusion $M_1 \cup M_2 \subset M_2$ nachweisen (die umgekehrte Inklusion $M_1 \cup M_2 \supset M_2$ gilt immer). Sei also $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, so ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1 = M_1 \cap M_2$, so ist $x \in M_2$, was zu zeigen war.

„**iii)** $\Rightarrow$ **i)**“: Es gelte $M_1 \cup M_2 = M_2$. Zu zeigen ist $M_1 \subset M_2$. Sei hierzu $x \in M_1$. Dann ist jedenfalls $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$.

c) Es sei $A \in \operatorname{Pot}(M_1) \cup \operatorname{Pot}(M_2)$. Dann ist $A \in \operatorname{Pot}(M_1)$ oder $A \in \operatorname{Pot}(M_2)$. Gilt ersteres, so ist nach Definition der Potenzmenge $A \subset M_1$ und damit auch $A \subset (M_1 \cup M_2)$. Folglich gilt, wiederum nach Definition der Potenzmenge, dass $A \in \operatorname{Pot}(M_1 \cup M_2)$. Im zweiten Fall $A \in \operatorname{Pot}(M_2)$ lässt sich entsprechend schließen.
Wir untersuchen, wann in **c)** Gleichheit gilt. Dazu nehmen wir zunächst an, dass

$$M_1 \subset M_2 \quad \text{oder} \quad M_2 \subset M_1 \tag{G}$$

gilt. Gilt $M_1 \subset M_2$, so ist nach **b)** $M_1 \cup M_2 = M_2$ und damit $\operatorname{Pot}(M_1 \cup M_2) = \operatorname{Pot}(M_2) \subset \operatorname{Pot}(M_1) \cup \operatorname{Pot}(M_2)$. Da die umgekehrte Inklusion in **c)** gezeigt wurde, gilt in diesem Fall die Gleichheit in **c)**. Gilt andernfalls $M_2 \subset M_1$, so gilt entsprechend $M_1 \cup M_2 = M_1$ und analog zu oben auch hier die Gleichheit in **c)**.
Die Negation von Annahme (G) lautet

$$M_1 \setminus M_2 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad M_2 \setminus M_1 \neq \emptyset. \tag{$\neg$ G}$$

Ist ($\neg$ G) wahr, so existieren $x_1 \in M_1 \setminus M_2$ und $x_2 \in M_2 \setminus M_1$. Wir setzen $B := \{x_1, x_2\}$. Dann gilt $B \subset (M_1 \cup M_2)$, aber $B \not\subset M_1$ und $B \not\subset M_2$. Folglich ist $B \in \operatorname{Pot}(M_1 \cup M_2)$, aber $B \notin \operatorname{Pot}(M_1) \cup \operatorname{Pot}(M_2)$. In diesem Fall gilt also in **c)** keine Gleichheit.

Aufgabe 5

a) Die angegebene Relation ist keine Äquivalenzrelation, da die Relation nicht symmetrisch ist. Z.B. ist $6 \sim 2$, da $6 = 2 \cdot 3$ ist, aber es gilt nicht $2 \sim 6$, da kein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $2 = 6 \cdot k$.

b) Die angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation:
Reflexivität: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = x + 0 \cdot 2\pi$ und somit $x \sim x$.
Transitivität: Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann existieren $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + 2k\pi$ und $y = z + 2l\pi$. Somit ist $x = z + 2(k+l)\pi$, also $x \sim z$.
Symmetrie: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \sim y$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + 2k\pi$. Folglich ist $y = x + 2(-k)\pi$ und $y \sim x$.

c) Die angegebene Relation ist keine Äquivalenzrelation, da die Relation nicht transitiv ist. Es gilt z.B. $\frac{1}{100} \sim \frac{1}{200}$ und $\frac{1}{200} \sim 0$, aber es gilt nicht $\frac{1}{100} \sim 0$.

d) Die angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation:
Reflexivität: Für alle $(z_1, n_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ gilt $z_1 n_1 = z_1 n_1$ und damit $(z_1, n_1) \sim (z_1, n_1)$.
Transitivität: Es seien $(z_1, n_1), (z_2, n_2), (z_3, n_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ und $(z_2, n_2) \sim (z_3, n_3)$. Dann gelten $z_1 n_2 = z_2 n_1$ und $z_2 n_3 = z_3 n_2$ und damit $\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_3}{n_3}$. Somit ist $(z_1, n_1) \sim (z_3, n_3)$.
Symmetrie: Für alle $(z_1, n_1), (z_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ gilt $z_1 n_2 = z_2 n_1$. Hieraus folgt $z_2 n_1 = z_1 n_2$ und somit $(z_2, n_2) \sim (z_1, n_1)$.