Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 12

Zunächst zum Supremum: Da A und B nichtleer und beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A + B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A + B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A + B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.
Wählen wir ein beliebiges $x \in A + B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \le \alpha$ und $b \le \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \le \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $\sup(A + B) \le \alpha + \beta$ ist, d. h. $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.
Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $< \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$.
Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und, da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.
Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A+B$ nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung kennen wir das folgende Resultat: Sei $\emptyset \ne M \subset \mathbb{R}$, M sei beschränkt. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$. Dann ist γ genau dann eine untere Schranke von M, wenn $-\gamma$ obere Schranke von $-M$ ist. Hieraus folgt $\inf(M) = -\sup(-M)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\inf(A + B) &= -\sup\big(-(A + B)\big) = -\sup\big((-A) + (-B)\big) = -\big(\sup(-A) + \sup(-B)\big)\\ &= -\big(-\inf A + (-\inf B)\big) = \inf A + \inf B.\end{aligned}$$

Aufgabe 13

a) Es gilt: $z^3 = (3 - i)^3 = (3 - i)(9 - 6i + i^2) = (3 - i)(8 - 6i) = 24 - 18i - 8i + 6i^2 = 18 - 26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26. Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2 + (-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben: $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2 + (-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z \cdot \bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3 - i} = \frac{1}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{3 + i}{3^2 - i^2} = \frac{3 + i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z \cdot w = (3 - i)(-1 + 2i) = -3 + 6i + i - 2i^2 = -1 + 7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7. Außerdem gilt $|z \cdot w| = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z| \cdot |w|$.

d) Es ist $\overline{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$\overline{z}^2+1/w^2 = (8+6i)+(-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8-\frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6+\frac{4}{25} = \frac{154}{25}$. Der Betrag von $\overline{z}^2 + 1/w^2$ lautet $|\overline{z}^2 + 1/w^2| = \sqrt{197^2+154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.

Aufgabe 14

a) Hier handelt es sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $-1-i$ den gleichen Abstand haben wie vom Punkt $3+3i$. Das ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also die Gerade $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z + 2$.

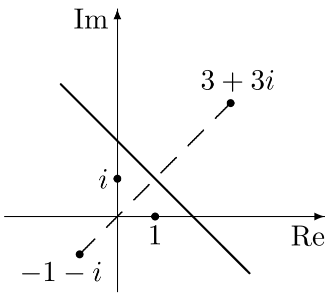
b) Dies ist der Schnitt zwischen dem Äußeren des Kreises um i mit Radius 1 (einschließlich der Kreislinie) und dem Inneren des Kreises um $1+2i$ mit Radius 3 (ohne Rand). Die Menge ist in der Skizze schraffiert.

c) Die komplexe Zahl $z = x+iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) liegt genau dann in dieser Menge, wenn

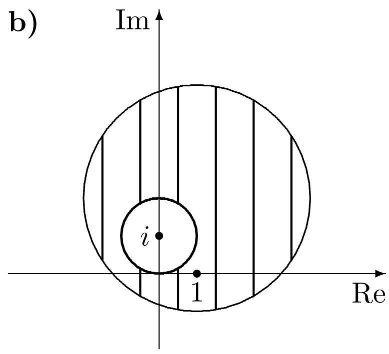
$$1 \geq \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}\big((x+iy)^2\big) = \operatorname{Re}(x^2+2ixy-y^2) = x^2-y^2$$

gilt, d. h. für $x^2 \leq 1+y^2$, also $|x| \leq \sqrt{1+y^2}$ bzw. $-\sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{1+y^2}$. Die Menge ist in der Skizze schraffiert; man beachte, dass es sich um eine unbeschränkte Menge handelt.

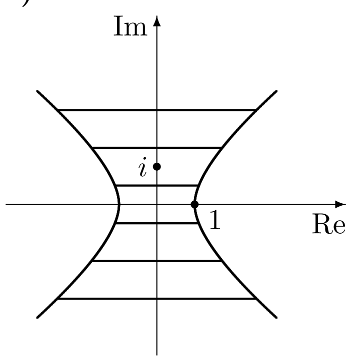
a)



b)



c)



Aufgabe 15

a) Es gilt $z^2-2z+3 = (z-1)^2+2$. Die Gleichung $z^2-2z+3=0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z-1 = i\sqrt{2}$ oder $z-1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1+i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1-i\sqrt{2}$.

b) Mit dem Ansatz $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib - b^2 = a^2 + b^2 \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \text{ und } 2ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2b^2 = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad b = 0. \end{aligned}$$

[In $(*)$ verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]
Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\mathrm{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.

c) Wir machen wieder den Ansatz $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ und erhalten aus dem Binomialsatz

$$z^3 = (a + ib)^3 = a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3.$$

Folglich ist, mit $(*)$ wie in b),

$$\begin{aligned} z^3 = -8 \quad &\Leftrightarrow \quad a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3 \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad 3a^2b - b^3 = 0 \text{ und } a^3 - 3ab^2 = -8 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(b = 0 \text{ und } a^3 = -8\big) \text{ oder } \big(3a^2 = b^2 \text{ und } a^3 - 9a^3 = -8\big) \\ &\Leftrightarrow \quad \big(b = 0 \text{ und } a = -2\big) \text{ oder } \big(a = 1 \text{ und } b^2 = 3\big). \end{aligned}$$

Also besitzt die Gleichung $z^3 = -8$ in $\mathbb{C}$ genau die drei Lösungen $z_1 = -2$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ und $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$.

Aufgabe 16

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k &\overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1} \Big(\frac{i}{2}\Big)^{l+1} = \frac{i}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \Big(\frac{i}{2}\Big)^l = \frac{i}{2} \cdot \frac{1 - (i/2)^n}{1 - i/2} \cdot \frac{1 + i/2}{1 + i/2} \\ &= \frac{i}{2} \cdot \frac{1 - (i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}}{1 - i^2/4} = \frac{i}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \Big(1 - (i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}\Big) \\ &= \frac{2}{5}\, i \Big(1 + i/2\Big) + \frac{2}{5}\, i \Big(-(i/2)^n - (i/2)^{n+1}\Big) = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\, i \Big(-1 - i/2\Big)(i/2)^n \\ &= \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{i^n}{2^n}. \end{aligned}$$

Nun seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ mit $n = 4m + r$. Dann gilt

$$i^n = i^{4m+r} = i^{4m} \cdot i^r = (i^4)^m \cdot i^r = 1^m \cdot i^r = i^r$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{i^r}{2^n}.$$

Für $r = 0$ (also, falls n durch 4 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i \Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 1$ (also, falls n durch 4 mit Rest 1 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{i}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i \Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}\Big).$$

— bitte wenden —

Für $r = 2$ (also, falls n durch 4 mit Rest 2 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\right)\frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n} + i\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}\right).$$

Für $r = 3$ (also, falls n durch 4 mit Rest 3 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\right)\frac{-i}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}} + i\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\right).$$

Wir lesen ab:

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k\right) = \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^n}\,, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\,, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k\right) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^n}\,, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\,, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

b) Mit Hilfe von $\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda})$ (für $\lambda \in \mathbb{C}$) erhalten wir

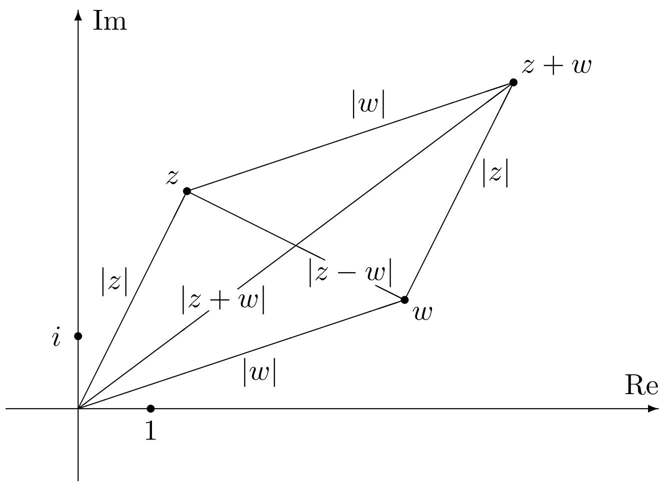
$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \underbrace{w\overline{z}}_{=\overline{\overline{w}z}=\overline{z\overline{w}}} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2\,.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|z-w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}\big(z(\overline{-w})\big) + |-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2\,.$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2$.

Geometrische Bedeutung: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.



c) Wir stellen zunächst fest, dass $z_0 = 0$ eine Nullstelle des Polynoms p ist. Also ist

$$p(z) = z(z^3 + (1+i)z^2 + (6+i)z + 6) =: zq(z).$$

Außerdem ist $z_1 = -1$ eine Nullstelle von p und somit auch von q. Um die noch fehlenden zwei Nullstellen von p zu bestimmen, führen wir Polynomdivision durch. Damit erhält man

$$
q(z) : (z+1) = \big(z^3 + (1+1i)\,z^2 + (6+1i)\,z + 6\big) : \big(z+1\big) = z^2 + iz + 6.
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
z^3 & +\,(1+1i)\,z^2 & +\,(6+1i)\,z & +\,6 \\
-\,z^3 & -\,z^2 & & \\ \hline
 & iz^2 & +\,(6+1i)\,z & \\
 & -\,iz^2 & -\,iz & \\ \hline
 & & 6z & +\,6 \\
 & & -\,6z & -\,6 \\ \hline
 & & & 0
\end{array}
$$

Durch quadratische Ergänzung erhalten wir nun

$$
z^2 + iz + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z + \frac{1}{2}i)^2 = -\frac{25}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(z + \frac{1}{2}i = \frac{5}{2}i \quad \text{oder} \quad z + \frac{1}{2}i = -\frac{5}{2}i\Big).
$$

Hieraus ergibt sich folglich die Linearfaktorzerlegung

$$
p(z) = z(z+1)(z-2i)(z+3i).
$$