Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12
10.11.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 17

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3}$

b) $a_n = (-1)^n + 1/n$

c) $a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$

d) $a_n = \dfrac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$

e) $a_n = n^4\Big(\sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}} - 1\Big)$

f) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$

Aufgabe 18

a) Es sei $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert a konvergiert, und geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so an, dass für alle $n \geq n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$b_1 := \sqrt{2}, \qquad b_{n+1} := \sqrt{2+b_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 19

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 20

a) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und -1 als Häufungswerte.

ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.

iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

— bitte wenden —

iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2011, ist aber nicht monoton.

v) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

b) Entscheiden Sie jeweils durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

i) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$; **ii)** $|a_n| < 2\varepsilon^2$; **iii)** $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$; **iv)** $|a_n a_{n+1}| < \varepsilon$;

v) $|a_n a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 21

Bestimmen Sie alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$ an.

a) $a_n = \big(1 + (-1)^n\big)^n$

b) $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + (n+1)/n, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Aufgabe 22

Gegeben seien $0 \leq q < 1$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|a_n - a_{n+1}| \leq q^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.