Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 17

a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3} = \frac{1/n+3/n^2-4/n^3}{1/n^3+1/n+4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

b) Wegen $a_{2n} = 1+\frac{1}{2n} \to 1$ $(n\to\infty)$ und $a_{2n+1} = -1+\frac{1}{2n+1} \to -1$ $(n\to\infty)$ besitzt die Folge (a_n) die zwei Häufungswerte 1 und -1. Daher ist (a_n) divergent.

c) Wegen $(u-v)(u+v) = u^2-v^2$, also $u-v = (u^2-v^2)/(u+v)$ für $u+v\neq 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{9n^2+2n+1}-3n &= \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2+1/n}{\sqrt{9+2/n+1/n^2}+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

d) Der Binomialsatz 4.11 (2) liefert für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}n^k = \alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{42}n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42}-n^{42} = \alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{41}n^{41}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{40}n^{40}+\alpha_{41}n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}}+\frac{\alpha_1}{n^{40}}+\ldots+\frac{\alpha_{40}}{n}+\alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

e) Wir verwenden die geometrische Summenformel 4.11 (1)

$$u^m-v^m = (u-v)\sum_{k=0}^{m-1}u^{m-1-k}v^k = (u-v)(u^{m-1}+u^{m-2}v+\ldots+uv^{m-2}+v^{m-1}) \qquad (*)$$

für $m=10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}}$, so gilt für alle $n\in\mathbb{N}$

$$a_n = n^4(b_n-1) \overset{(*)}{=} n^4\cdot\frac{b_n^{10}-1^{10}}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1} = \frac{n^4(3n^{-4}+n^{-9})}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1} = \frac{3+n^{-5}}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1}.$$

Wegen $b_n\to 1$ folgt $a_n\to\frac{3}{10}$ $(n\to\infty)$.

f) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \le a_n \le \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\cdot\sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2}\to 1$ $(n\to\infty)$ folgt mit 6.3 (4): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Aufgabe 18

a) Wegen $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ konvergiert (a_n) für $n \to \infty$ gegen 2.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist
$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n - 2(n+1)}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}.$$
Daher ergibt sich
$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert (a_n) gegen 2.

Ist $\varepsilon = 10^{-10}$, so kann man beispielsweise $n_0 = 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1$ nehmen. Damit gilt $|a_n - 2| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2 \cdot 10^{10}$.

b) Die Folge (b_n) sei durch die Rekursionsvorschrift
$$b_1 = \sqrt{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
gegeben. (Offenbar sind alle $b_n \geq 0$; also kann man die Wurzel ziehen.)

1. Beh.: Die Folge (b_n) ist monoton wachsend, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $b_n \geq b_{n-1}$.

Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt $b_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geq \sqrt{2} = b_1$.

Induktionsschluss: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Für dieses n gelte $b_n \geq b_{n-1}$ (IV). Dann folgt
$$b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} \overset{\text{IV}}{\geq} \sqrt{2 + b_{n-1}} = b_n.$$

2. Beh.: Die Folge (b_n) ist nach oben durch 2 beschränkt, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n \leq 2$.

Induktionsanfang: Es gilt $b_1 = \sqrt{2} \leq 2$.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $b_n \leq 2$ (IV). Dann folgt
$$b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} \overset{\text{IV}}{\leq} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Da (b_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert (b_n) gegen einen Grenzwert $b \in \mathbb{R}$. Da die Folge (b_{n+1}) eine Teilfolge von (b_n) ist, gilt nach Teil a): $\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b$. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsformel ergibt sich für b die Gleichung
$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + b_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} b_n} = \sqrt{2 + b}.$$
Quadrieren liefert $b^2 = 2 + b$ bzw. $0 = b^2 - b - 2 = (b-2)(b+1)$, also $b = 2$ oder $b = -1$. Wegen $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $b \geq 0$ (vgl. 6.3 (3)). Daher ist $b = 2$ der Grenzwert von (b_n).

Aufgabe 19

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dann ist (a_n) beschränkt und (b_n) konvergent. Jedoch konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$ nicht.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Behauptet wird, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ gegen 0 konvergiert.

Da (a_n) beschränkt ist, existiert eine Konstante $K > 0$ so, dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Deshalb ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$
$$|c_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq K|b_n|.$$
Wegen $b_n \to 0$ konvergiert nach 6.3 (2) $|b_n| \to 0$ und nach 6.3 (5) auch $K|b_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Mit 6.3 (1) folgt $c_n \to 0$ für $n \to \infty$.

— bitte wenden —

Aufgabe 20

a) Etwa folgende Folgen erfüllen das Verlangte:

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

ii) $(b_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \ldots)$

iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = 2011 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

v) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = 0$ für gerade n und $e_n = n$ für ungerade n.

b) **i)** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Die Folge $(a_n) = (\sqrt{n})$ erfüllt also die Voraussetzung. Allerdings ist (a_n) divergent.

ii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\varepsilon = 2\delta^2$ für $\delta := \sqrt{\varepsilon/2} > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein n_0 so, dass für $n \geq n_0$ stets $|a_n| < 2\delta^2 = \varepsilon$ ist. Die Folge konvergiert also gegen Null.

iii) Etwa $(a_n) = ((-1)^n)$ erfüllt $|a_n + a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$ sogar für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) ist jedoch divergent.

iv) Die Folge (a_n) mit $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ erfüllt sicher $|a_n \cdot a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$, ist aber divergent.

v) In diesem Fall ist (a_n) konvergent mit Grenzwert Null. Wäre (a_n) keine Nullfolge, so gäbe es zu vorgegebenem ε eine Teilfolge $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, für welche stets $|a_{k(n)}| \geq \sqrt{\varepsilon}$ wäre. Dann wäre aber stets $|a_{k(n)}^2| \geq \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ im Widerspruch zur Voraussetzung!

Aufgabe 21

a) Offenbar gilt

$$a_{2n} = \left(1 + (-1)^{2n}\right)^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, daher ergibt sich $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = \infty$. Weiter gilt

$$a_{2n+1} = \left(1 + (-1)^{2n+1}\right)^{2n+1} = (1-1)^{2n+1} = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist 0 ein Häufungswert der Folge. Weitere Häufungswerte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele Folgenglieder a_n in ihr liegen. Somit ist $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

b) Wegen $1 + 1/2^n \to 1$ und $2 + (n+1)/n = 2 + 1 + 1/n \to 3$ für $n \to \infty$ ergeben sich hier die drei Häufungswerte 1, 2 und 3. Damit gilt $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = 3$.

Aufgabe 22

Gegeben seien $0 \leq q < 1$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|a_n - a_{n+1}| \leq q^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Beh.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.
Wir zeigen zunächst: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$
Für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+k} - a_n &= a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{l=0}^{k-2} a_{n+l+1}\right) - a_n \\
&\overset{j:=l+1}{=} a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{n+j}\right) - a_n \\
&= \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j}\right) = \sum_{j=0}^{k-1}(a_{n+j+1} - a_{n+j}).
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}|a_{n+k}-a_n| &\leq \sum_{j=0}^{k-1}|a_{n+j+1}-a_{n+j}| \leq \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+j} = q^n \sum_{j=0}^{k-1} q^j \\ &= q^n\,\frac{1-q^k}{1-q} \leq \frac{q^n}{1-q}.\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $0 \leq q < 1$ konvergiert die Folge $(\frac{q^n}{1-q})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, daher finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{q^{n_0}}{1-q} < \varepsilon$. Demzufolge ist

$$|a_{n+k}-a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und } k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Hieraus folgt

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m, n \geq n_0.$$

[Denn: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq n_0$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $m > n$. Dann ist $k := m - n \in \mathbb{N}$ und nach (1) ergibt sich $|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.]