

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
5. Übungsblatt

Aufgabe 23

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

Aufgabe 24

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

Aufgabe 25

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ und $b_n := \frac{(1 + \frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}$.

- a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.
- c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?
- d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

Aufgabe 26

Berechnen Sie für $q \in (0, 1)$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)q^n.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Aufgabe 27

- a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ fest sowie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a . Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+p})$ konvergiert und bestimmen Sie den Wert der Reihe.
- b) Zeigen Sie, dass folgende Reihen konvergieren und bestimmen Sie ihre Reihenwerte.

i) $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$ für $p \in \mathbb{N}$ fest ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Hinweis: Es ist $\frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right)$ für $n > p$ und $\frac{y}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}$ für $|y| \neq 1$.