Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 23

a) Für $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}}$. Wegen

$$a_n = \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(-2)^{3n}}{3^{2n}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{((-2)^3)^n}{(3^2)^n} = -\frac{1}{6} \cdot \Big(-\frac{8}{9}\Big)^n$$

gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{8}{9} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{6}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{8}{9} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Ihr Wert ist

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = -\frac{1}{6}\sum_{n=1}^\infty \Big(-\frac{8}{9}\Big)^n = -\frac{1}{6}\left[\sum_{n=0}^\infty \Big(-\frac{8}{9}\Big)^n - 1\right] \overset{\text{geom. Reihe}}{=} -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-(-8/9)} - 1\right] = \frac{4}{51}.$$

b) Nach dem binomischen Satz gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+k} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^n = \Big(\frac{3}{4}\Big)^n.$$

Wir haben also eine geometrische Reihe vor uns; wegen $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ ist sie konvergent und hat den Wert

$$\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{3}{4}\Big)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4\,.$$

c) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^N \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^N \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^N \Big(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\Big) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 1\,.$$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{n}{(n+1)!}$ und hat den Wert 1.

Aufgabe 24

a) Die Bernoullische Ungleichung liefert $2^n = (1+1)^n \geq 1+n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. es ist stets $\sqrt[n]{n} \leq 2$. Somit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}\right| \leq \frac{2}{n!} =: b_n\,.$$

Bekanntlich konvergiert $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$ (mit Reihenwert e), also ist auch $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergent, und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ folgt mit dem Majorantenkriterium.

b) Für $n \geq 3$ ist der Nenner positiv und es gilt

$$\frac{n+4}{n^2-3n+1} \geq \frac{n+0}{n^2+0} = \frac{1}{n} \geq 0\,.$$

Aus der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ folgt mit dem Minorantenkriterium die Divergenz von $\sum_{n=1}^\infty \frac{n+4}{n^2-3n+1}$.

c) Für $n \geq 3$ gilt $\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ und daher $(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n \leq (\frac{5}{6})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{5}{6})^n$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$ absolut konvergent.

d) Ist $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(1+1/n)^2}{(2+2/n)(2+1/n)}.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4} < 1$. Das Quotientenkriterium liefert, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

e) Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n} = (-1)^n b_n$ mit $b_n := \frac{1}{3n+(-1)^n}$. Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0. Ferner ist (b_n) monoton fallend, denn für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(n+1)+(-1)^{n+1}}{3n+(-1)^n} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geq (-1)^n - (-1)^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geq 2(-1)^n.$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wegen

$$|a_n| = \frac{1}{3n+(-1)^n} \geq \frac{1}{3n+n} = \frac{1}{4n}$$

und der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Deshalb ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent.

f) Wegen $i^4 = (-1)^2 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$i^{4m-3} = i, \qquad i^{4m-2} = -1, \qquad i^{4m-1} = -i, \qquad i^{4m} = 1.$$

Folglich erhalten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{4N} \frac{i^n}{n} &= \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{i^{4m-3}}{4m-3} + \frac{i^{4m-2}}{4m-2} + \frac{i^{4m-1}}{4m-1} + \frac{i^{4m}}{4m}\right) \\
&= i \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1}\right) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{4m} - \frac{1}{4m-2}\right) \\
&= i\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + - \ldots + \tfrac{1}{4N-3} - \tfrac{1}{4N-1}\right) + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{6} + - \ldots + \tfrac{1}{4N} - \tfrac{1}{4N-2}\right) \\
&= i \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \frac{1}{2k}.
\end{aligned}$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergieren diese Summen für $N \to \infty$. Damit wissen wir: Wenn wir mit s_N die N-te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnen, dann konvergiert s_{4N} für $N \to \infty$. Für $m \in \{1,2,3\}$ gilt

$$s_{4N+m} = s_{4N} + \sum_{n=4N+1}^{4N+m} \frac{i^n}{n} \xrightarrow{N\to\infty} \lim_{N\to\infty} s_{4N}$$

wegen $|i^n/n| = 1/n$. Folglich konvergiert s_N für $N \to \infty$, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ konvergiert. Sie ist aber nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{i^n}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Aufgabe 25

a) Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für $n > 1$ gilt wegen $n > \sqrt{n}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz von (a_n) gegen 0 ist klar wegen $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C mit $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq C$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$s_N \leq C - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \qquad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund von $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty$ für $N \to \infty$ folgt hieraus $s_N \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$, d.h. die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist tatsächlich divergent.

c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge (a_n) nicht monoton ist.

d) Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Für gerades $n \in \mathbb{N}$ dagegen ergibt sich

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2\cdot 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es gilt also $\limsup(b_{n+1}/b_n) = \infty > 1$ und $\liminf(b_{n+1}/b_n) = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.

Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2},$$

d. h. es gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geq \frac{3}{2} > 1$, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 26

Sei $q \in (0,1)$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist absolut konvergent und es gilt nach einem Beispiel in Abschnitt 7.10 der Vorlesung

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n.$$

Diese Reihe ist als Cauchyprodukt absolut konvergenter Reihen ebenfalls absolut konvergent. Indem man das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ bildet, ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^k q^{n-k}\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(q^n \sum_{k=0}^{n}(k+1)\Big) \overset{\text{Aufg. 10a)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)q^n.\end{aligned}$$

Für die gegebene Reihe erhalten wir daher

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n = 2\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Aufgabe 27

a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ fest sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Um die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ zu beweisen, betrachten wir die Folge der N-ten Partialsummen (s_N) und zeigen, dass diese für $N \to \infty$ konvergiert. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq p$ gilt

$$\begin{aligned}s_N &= \sum_{n=0}^{N}(a_n - a_{n+p}) = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_{n+p} = \sum_{n=0}^{p-1} a_n + \underbrace{\sum_{n=p}^{N} a_n}_{=\sum_{k=0}^{N-p} a_{k+p}} - \sum_{n=0}^{N-p} a_{n+p} - \sum_{n=N-p+1}^{N} a_{n+p} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} a_n - \sum_{n=N-p+1}^{N} a_{n+p}.\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{N\to\infty} a_{N+1} = a, \lim_{N\to\infty} a_{N+2} = a, \ldots, \lim_{N\to\infty} a_{N+p} = a$ folgt

$$\sum_{n=N-p+1}^{N} a_{n+p} = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+p} \xrightarrow{N\to\infty} \underbrace{a + a + \ldots + a}_{p \text{ Summanden}} = p\,a.$$

Demnach konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p}) = \lim_{N\to\infty} s_N = \sum_{n=0}^{p-1} a_n - p\,a.$$

b) **i)** Sei $p \in \mathbb{N}$ fest. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq p+1$ gilt

$$\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{(n-p)(n+p)} = \frac{1}{2p}\Big(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\Big).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-p^2} &= \frac{1}{2p}\sum_{n=p+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\Big) \overset{k:=n-(p+1)}{=} \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+p+1-p} - \frac{1}{k+p+1+p}\Big) \\ &= \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2p+1}\Big) = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+2p}) \quad \text{mit } a_k := \frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

Da die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen $a = 0$ konvergiert, liefert der a)-Teil, dass die Reihe $\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$ konvergiert und

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+2p}) = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{2p-1} a_k - 2p\cdot 0 = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{2p-1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n}.$$

ii) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Mit Hilfe von $\frac{y}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y^2}$ (für $y = x^{2^n}$) erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{1 - x^{2^n}} - \frac{1}{1 - x^{2^{n+1}}} \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \quad \text{ mit } a_n := \frac{1}{1 - x^{2^n}}.$$

Die Folge (a_n) ist konvergent mit Grenzwert 1, falls $|x| < 1$, und Grenzwert 0, falls $|x| > 1$. Gemäß a) konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ und ihr Wert lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0 - 1 \cdot \lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - 1 & \text{für } |x| < 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{für } |x| > 1 \end{cases}.$$