Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12
24.11.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 28

Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\sin(2x) = 2\sin x\,\cos x$

b) $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

c) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}$

d) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}$

Aufgabe 29

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!} = \cos(\sin(x))\,e^{\cos(x)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n!} = \sin(\sin(x))\,e^{\cos(x)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Real- und Imaginärteil von $e^{e^{ix}}$.

Aufgabe 30

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}\,x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}(z-2i)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{n(1+(-1)^n)}x^{2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)z^n$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}2^k z^{k^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+3i)^n}{n^2}$

Aufgabe 31

Welche Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)!}\,z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(z+1)^{2n+2}$

Aufgabe 32

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0. Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = 1$

b) $f(z) = \dfrac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 0$

c) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Hinweis: Benutzen Sie in **a)** und in **c)** die Additionstheoreme für Sinus bzw. Cosinus. In **b)** hilft $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Aufgabe 33

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $f(rx) = rf(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{Q}$.

b) Ist f stetig in 0, so ist f stetig auf $\mathbb{R}$.

c) Ist f stetig auf $\mathbb{R}$, so gilt $f(x) = xf(1)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.