Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 28

a) Das Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x\,.$$

b) Ebenso folgt aus $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ die Gleichung

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$$

und mit der aus der Vorlesung bekannten Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x\,, \\ \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1\,. \end{cases}$$

c) Das Additionstheorem liefert wegen $\cos(-b) = \cos b$ und $\sin(-b) = -\sin b$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b\,.$$

Mit $a := \frac{1}{2}(x+y)$ und $b := \frac{1}{2}(x-y)$ erhält man also

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \\ &= \big(\sin a \cos b + \cos a \sin b\big) + \big(\sin a \cos b - \cos a \sin b\big) = 2 \sin a \cos b\,. \end{aligned}$$

d) Genau wie eben überlegen wir uns zunächst

$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

und erhalten dann mit $a := \frac{1}{2}(x+y)$ und $b := \frac{1}{2}(x-y)$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ &= \big(\cos a \cos b - \sin a \sin b\big) + \big(\cos a \cos b + \sin a \sin b\big) = 2 \cos a \cos b\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 29

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx) + i \sin(nx)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} \\ &= e^{e^{ix}} = e^{\cos(x) + i \sin(x)} = e^{\cos(x)} e^{i \sin(x)} \\ &= e^{\cos(x)} \big[\cos(\sin(x)) + i \sin(\sin(x))\big] \\ &= e^{\cos(x)} \cos(\sin(x)) + i\, e^{\cos(x)} \sin(\sin(x)). \end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt die Identitäten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} = e^{\cos(x)} \cos(\sin(x)) \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} = e^{\cos(x)} \sin(\sin(x)).$$

Aufgabe 30

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1\,.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x=-1$ und $x=1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}\,.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}\,.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1, 1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{\left|e^{n(1+(-1)^n)}\right|} = \begin{cases} e^{2n/2n} = e\,, & n \text{ gerade}\,, \\ e^{0/2n} = 1\,, & n \text{ ungerade}\,, \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1}. Für $x = \pm e^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n}\,.$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $e^{n(1+(-1)^n)}e^{-2n} = e^{2n}e^{-2n} = 1 \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius e^{-2}, d.h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{\left|2^k z^{k^2}\right|} = \sqrt[k]{2^k} \cdot \sqrt[k]{|z|^{k^2}} = 2\,|z|^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $\left|2^k z^{k^2}\right| = 2^k \nrightarrow 0$ $(k \to \infty)$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| = 1$ gilt

$$\left|\frac{(z+3i)^n}{n^2}\right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z+3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leq 1$.

Aufgabe 31

a) Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n .$$

Die erste Reihe ergibt $E(z)$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z}\big(E(z) - 1\big) .$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ dargestellte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = E(0) - 2 = -1 , \qquad f(z) = E(z) - \frac{2E(z) - 2}{z} = \frac{(z-2)E(z) + 2}{z} \quad (z \neq 0) .$$

b) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} = (z+1)\sin(z+1) .$$

Aufgabe 32

a) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1 + z - 1) = \sin(1)\cos(z-1) + \cos(1)\sin(z-1) \\ &= \sin(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{2k} + \cos(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \sin(1)\, \frac{(-1)^{n/2}}{n!} , & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\, \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!} , & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

b) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung des Hinweises

$$f(z) = \frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)} .$$

Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

und für $|2z| < 1$ ist

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n . \qquad (*)$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n = \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3} 2^n = \frac{1}{3}\left(2(-1)^n + 2^n\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Der Konvergenzradius beträgt $\frac{1}{2}$, weil die geometrische Reihe in $(*)$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|2z| \geq 1$ divergiert.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten ($\rightarrow$ Partialbruchzerlegung): Wegen $1 - z - 2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z) + b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a + b + (-2a+b)z}{1-z-2z^2}\,.$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a + b = 1$ und $-2a + b = -1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

c) Wegen $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ (vgl. Aufgabe 28 b)) ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1 + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, 2^{2k} x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } n = 0 \\ 0\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\, 2^n\,, & \text{falls } n \geq 2 \text{ gerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius ist ∞.

Aufgabe 33

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Wegen $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ ist $f(0) = 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ folgt aus $0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$

$$f(-x) = -f(x). \tag{1}$$

Für jedes $p \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt nach $(p-1)$-maliger Verwendung der Voraussetzung

$$f(px) = pf(x).$$

Hieraus folgt mit (1)

$$f(px) = pf(x) \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Für alle $q \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich damit

$$f(x) = f(q\,\tfrac{1}{q}x) = q\,f(\tfrac{1}{q}x) \quad \Rightarrow \quad f(\tfrac{1}{q}x) = \tfrac{1}{q}\,f(x). \tag{3}$$

Sei nun $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$f(rx) = f(\tfrac{p}{q}x) \overset{(2)}{=} pf(\tfrac{1}{q}x) \overset{(3)}{=} \tfrac{p}{q}f(x) = rf(x).$$

b) Sei f stetig in 0, d.h. für alle reellen Folgen (x_n) mit $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt $f(x_n) \to f(0)$ $(n \to \infty)$.

Beh.: f ist stetig auf $\mathbb{R}$, d.h. f ist stetig in y für alle $y \in \mathbb{R}$.

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig und (x_n) sei eine reelle Folge mit $x_n \to y$ $(n \to \infty)$. Zu zeigen ist $f(x_n) \to f(y)$ $(n \to \infty)$. Es gilt

$$f(x_n) - f(y) \overset{(1)}{=} f(x_n) + f(-y) = f(x_n + (-y)) = f(x_n - y) \xrightarrow{n\to\infty} f(0) \overset{\text{a)}}{=} 0,$$

denn $x_n - y \to 0$ $(n \to \infty)$ und f ist im Nullpunkt stetig nach Voraussetzung. Also folgt

$$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(y),$$

d.h. f ist stetig in y.

c) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Folge (r_n) rationaler Zahlen mit $r_n \to x$ für $n \to \infty$ (vgl. Beispiel (5) in Abschnitt 6.2). Aufgrund der Stetigkeit von f ergibt sich

$$f(r_n) \to f(x) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Andererseits ist

$$f(r_n) = f(r_n \cdot 1) \overset{\text{a)}}{=} r_n f(1) \to x f(1) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt $f(x) = x f(1)$.