Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12
01.12.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 34

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x}{x^2-x-6}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$,

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$.

Aufgabe 35

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x\notin\{1,3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x=1 \\ 0 & \text{für } x=3 \end{cases}$,

b) $f\colon [-7,3]\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\} & \text{für } x\in[-7,-5]\cup[-1,3] \\ x+5 & \text{für } x\in(-5,-1) \end{cases}$.

Aufgabe 36

Die Funktion $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x)=\frac{x+2}{x+3}, \qquad x\in[0,2].$$

a) Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Funktion $g:[a,b]\to[a,b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $x_0\in[a,b]$ mit $g(x_0)=x_0$.

b) Wenden Sie **a)** auf f an, um zu zeigen, dass ein $x_0\in\mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0)=x_0$.

c) Nun sei $y_0\in[0,2]$ gegeben. Die Folge (y_n) wird rekursiv definiert durch $y_{n+1}:=f(y_n)$. Konvergiert diese Folge?

— bitte wenden —

Aufgabe 37

Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

a) $f_n(x) = \dfrac{x + nx^2 + nx}{1 + nx}$ auf $I_1 = [0, \infty)$ bzw. auf $I_2 = [a, \infty)$ mit einem $a > 0$,

b) $f_n(x) = (1 - x)^n$ auf $I_1 = [0, 1]$ bzw. auf $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$,

c) $f_n(x) = nx(1 - x)^n$ auf $I = [0, 1]$.

Aufgabe 38

Die Funktion $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1, 1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis:
Die **Klausur zu HM I** findet am Montag, den 12.03.2012, 08:00-10:00 Uhr statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich, welche über das KIT-Studierendenportal vorgenommen werden kann. **Anmeldeschluss ist Freitag, der 10.02.2012.**