Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 34

a) Für $x \neq 1$ gilt wegen $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ [Diese Gleichheit erhält man mit Hilfe der geometrischen Summenformel 4.11 (1) oder der Polynomdivision $(1-x^3) : (1-x)$.]

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(1+x+x^2)-3}{1-x^3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{x+2}{1+x+x^2}\,.$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{1+2}{1+1+1^2} = -\frac{3}{3} = -1\,.$$

b) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit der bekannten Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ [wieder geometrische Summenformel 4.11 (1) oder Polynomdivision] die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = a - b = \frac{(\sqrt[3]{8+x}\,)^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4}\,.$$

Folglich hat man nach Satz 8.3 und Beispiel in 8.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{12}\,.$$

c) Dieser Grenzwert existiert nicht. Der Zähler des Bruchs hat in $x = 3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $(x^2-x)/(x+2) \to 6/5$ für $x \to 3$ gilt

$$\frac{x^2-x}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3}\cdot\frac{x^2-x}{x+2} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } x \to 3+\,, \\ -\infty & \text{für } x \to 3-\,. \end{cases}$$

d) Für alle $x \geq 1$ gilt

$$\sqrt{x\pm 1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x\pm 1}\,)^2 - (\sqrt{x}\,)^2}{\sqrt{x\pm 1}+\sqrt{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x\pm 1}+\sqrt{x}}\,,$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x} - (\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)} = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)} \\ &= \frac{(x-1)-(x+1)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\,)}\,.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\,)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+1/x}+1\right)\left(\sqrt{1-1/x}+1\right)\left(\sqrt{1-1/x}+\sqrt{1+1/x}\,\right)} = \frac{-2}{2\cdot 2\cdot 2} = -\frac{1}{4}\,.$$

e) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ hat man für jedes $x \neq 0$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x-\sin x}{x\sin x} = \frac{x-(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots)}{x(x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots)} = \frac{\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\ldots}{x^2-\frac{1}{3!}x^4+\ldots}\,,$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen (vgl. Satz 8.7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\ldots}{x^3-\frac{1}{3!}x^5+\ldots} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}x^2+\ldots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\ldots} = \frac{\frac{1}{3!}}{1} = \frac{1}{6}\,.$$

f) Wir erhalten wegen $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (vgl. Beispiel in 8.4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\,.$$

Bei dieser Umformung muss man beachten, dass aus $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ insbesondere folgt, dass $\sin x \neq 0$ in der Nähe von $x_0 = 0$ gilt.

Für jede Folge (x_n) mit $x_n \to 0$ und $x_n \neq 0$ hat man also $\sin x_n \to 0$ und $\sin x_n \neq 0$ für fast alle n. Daher folgt aus $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$ (vgl. Beispiel in 8.4)

$$\frac{e^{\sin x_n}-1}{\sin x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,.$$

Demnach existiert der zu untersuchende Grenzwert: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x} = 1$.

Aufgabe 35

a) Die rationale Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist nach Beispiel in 8.3 außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners stetig. Wegen $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$ verschwindet der Nenner für $x = 1$ oder $x = 3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ stetig ist. Nun gilt für $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

Somit ist $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = f(1)$, d.h. f ist auch in der Stelle 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ nicht (vgl. Aufg. 34 c)). Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist).

b) Wegen $x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7,-5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7,-5]$. Für $x \in [0,3]$ ist $(x-3)(x+5) \leq 0$ und $x^3 \geq 0$, also gilt $f(x) = x^2+2x-15$ für $x \in [0,3]$. Für $x \in [-1,0)$ ist $x^3 \in [-1,0)$, aber $x^2+2x-15 \leq 1+0-15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2+2x-15$ für $x \in [-1,0)$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ (vgl. Aufgabe 8 vom 2. Übungsblatt). Daher ist f jedenfalls außerhalb $\{-5,-1\}$ stetig. Da $x^2+2x-15$ und $x+5$ in -1 nicht denselben Wert annehmen, gilt

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = 4 \neq -16 = f(-1) = \lim_{x\to -1+} f(x).$$

Nach Satz in 8.10 ist f in -1 nicht stetig. Entsprechend gilt, da x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, dass f in -5 nicht stetig ist.

Aufgabe 36

a) Wir definieren die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wegen $g([a, b]) \subset [a, b]$ gilt $h(a) = a - g(a) \leq a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geq b - b = 0$. Daher liegt $y_0 := 0$ zwischen den Funktionswerten $h(a)$ und $h(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es (mind.) ein $x_0 \in [a, b]$ mit $h(x_0) = 0$, d.h. $g(x_0) = x_0$.

b) Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist f nach Satz 8.3 stetig. Zudem ist für $x \geq 0$ offenbar $f(x) \geq 0$ und $f(x) = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3} \leq 1$. Deshalb gilt für die stetige Funktion $f : [0, 2] \to [0, 2]$ gemäß **a)**: Es gibt (mindestens) ein $x_0 \in [0, 2]$ mit $f(x_0) = x_0$. (Solch ein x_0 heißt *Fixpunkt* von f.)

c) Wir verifizieren zunächst, dass die Funktion $f : [0, 2] \to [0, 2]$ monoton wachsend ist. Für alle $x, y \in [0, 2]$ gilt nämlich

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+3} \geq \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{x+3} \leq 1 - \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)\,.$$

Nun zeigen wir, dass die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, definiert durch $y_0 \in [0, 2]$ und $y_n := f(y_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, monoton ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall $y_0 \leq f(y_0)$: Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : \ y_{n-1} \leq y_n$. Denn:
IA: $n = 1$. Es ist $y_0 \leq f(y_0) = y_1$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $y_{n-1} \leq y_n$ (IV). Da f monoton wachsend ist, folgt

$$y_n = f(y_{n-1}) \overset{\text{IV}}{\leq} f(y_n) = y_{n+1}\,.$$

Fall $y_0 > f(y_0)$: Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : \ y_{n-1} \geq y_n$.
Dies kann man ähnlich wie eben durch vollständige Induktion beweisen.

Außerdem gilt $y_0 \in [0, 2]$ und $y_n = f(y_{n-1}) \in [0, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt.

Die beschränkte und monotone Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert nach Satz 6.4.

Bemerkung: Macht man in der Rekursionsformel $y_{n+1} = f(y_n)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ (und beachtet dabei die Stetigkeit von f), so ergibt sich für den Grenzwert a der Folge (y_n) die Gleichung

$$a = \lim_{n \to \infty} y_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(a)\,,$$

d.h. a ist Fixpunkt von f. Rechnen wir a aus: Es gilt $a = \frac{a+2}{a+3}$. Nach Multiplikation mit $a + 3$ erhält man die quadratische Gleichung $a^2 + 2a - 2 = 0$ in a, die genau für $a = -1 + \sqrt{3}$ oder $a = -1 - \sqrt{3}$ erfüllt ist. Wegen $y_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muss $a \geq 0$ gelten, also $a = -1 + \sqrt{3}$.

Aufgabe 37

a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(0) \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Für $x > 0$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} = \frac{x/n + x^2 + x}{1/n + x} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{x^2 + x}{x} = x + 1\,.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Auf $[0, \infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da die Funktion f in 0 unstetig ist, alle f_n dort aber stetig sind (vgl. 8.8 (d)).

Auf $[a,\infty)$ mit einem $a>0$ liegt dagegen gleichmäßige Konvergenz vor. Für jedes $x\in[a,\infty)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} |f_n(x)-f(x)| &= \left|\frac{x+nx^2+nx}{1+nx}-(x+1)\right| = \left|\frac{x+nx^2+nx-(x+1)(1+nx)}{1+nx}\right| \\ &= \left|\frac{x+nx^2+nx-x-nx^2-1-nx}{1+nx}\right| = \left|\frac{-1}{1+nx}\right| \le \frac{1}{1+na} =: \alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \end{aligned}$$

Nach 8.8 (a) konvergiert (f_n) auf $[a,\infty)$ gleichmäßig gegen f.

b) Es gilt $f_n(0)=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Ist $x\in(0,1]$, so folgt $|1-x|<1$ und damit

$$f_n(x)=(1-x)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x=0,\\ 0, & x\in(0,1].\end{cases}$$

Auf $[0,1]$ ist diese Funktion unstetig, im Gegensatz zu den Funktionen f_n; also kann die Konvergenz auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig sein (vgl. 8.8 (d)).

Auf $[\frac{1}{2},1]$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor: Für alle $x\in[\frac{1}{2},1]$ gilt wegen $|1-x|\le\frac{1}{2}$

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)|=|(1-x)^n|=|1-x|^n\le 2^{-n}\,,$$

und nach 8.8 (a) bedeutet dies gleichmäßige Konvergenz.

c) Offenbar gilt $f_n(0)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Für $x\in(0,1]$ ist $q:=1-x\in[0,1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x)=nxq^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

(Dass $nq^n\to0$ für $n\to\infty$ gilt, folgt daraus, dass wegen $\sqrt[n]{nq^n}\to q<1$ für $n\to\infty$ die Reihe über nq^n konvergiert.) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit $f(x)=0$ für alle $x\in[0,1]$.

Obwohl die Grenzfunktion f stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Gemäß Definition konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f, falls

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0\ \forall x\in[0,1]:\quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

erfüllt ist. Negation liefert die Bedingung, dass die Funktionenfolge (f_n) nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f konvergiert:

$$\exists\varepsilon>0\ \forall n_0\in\mathbb{N}\ \exists n\ge n_0\ \exists x\in[0,1]:\quad |f_n(x)-f(x)|\ge\varepsilon.$$

Wegen

$$f_n(\tfrac{1}{n+1})=n\cdot\tfrac{1}{n+1}(1-\tfrac{1}{n+1})^n=\tfrac{n}{n+1}(\tfrac{n}{n+1})^n=\tfrac{n}{n+1}(\tfrac{n+1}{n})^{-n}=\tfrac{1}{1+1/n}(1+\tfrac{1}{n})^{-n}\xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}$$

gilt $|f_n(\frac{1}{n+1})|\ge\frac{1}{2}e^{-1}$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$.

Ist $\varepsilon:=\frac{1}{2}e^{-1}$ gesetzt, dann finden wir also zu jedem $n_0\in\mathbb{N}$ ein $n\ge n_0$ und ein $x\in[0,1]$ mit $|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)|\ge\varepsilon$ (nämlich $x=\frac{1}{n+1}$). Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.

Aufgabe 38

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1]\setminus\{0\}$ stetig. Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{1}$$

Demnach gilt $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)|\le 1$ für alle $x\in[-1,1]$: Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$|f(x)|\overset{(1)}{=}\frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\ge 0}}\le |x|\le 1.$$

Wegen $f(0)=0$ ist $|f(x)|\le 1$ für alle $x\in[-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1])\subset[-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1]\subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0\in[-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1)=-1$ und $f(1)=1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0\in[-1,1]$ mit $y_0=f(x_0)\in\{f(x):\ x\in[-1,1]\}=f([-1,1])$. Da $y_0\in[-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1]\subset f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1])=[-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X,Y Mengen und $f:X\to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y=f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x=g(y)$ zu bringen (wobei $x\in X$, $y\in Y$ und $g:Y\to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
y=f(x) \quad&\iff\quad y=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad\iff\quad 1-xy=\sqrt{1-x^2}\\
\overset{1-xy\ge 0}{\iff}\quad& 1-2xy+x^2y^2=1-x^2 \quad\iff\quad x^2(1+y^2)=2xy\\
\overset{x\neq 0}{\iff}\quad& x(1+y^2)=2y \quad\iff\quad x=\frac{2y}{1+y^2}\,.
\end{aligned}$$

Für $x=0$ gilt $y=f(0)=0$, also gilt auch hier $x=\frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1}:\ \underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])}\to[-1,1],\ y\mapsto\frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1,x_2\in[-1,1]$ mit $x_1<x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x_2)-f^{-1}(x_1)&=\frac{2x_2}{1+x_2^2}-\frac{2x_1}{1+x_1^2}=\frac{2x_2(1+x_1^2)-2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}=\frac{2(x_2-x_1+x_1^2x_2-x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}\\
&=\frac{2(x_2-x_1+x_1x_2(x_1-x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}=\frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}>0\,,
\end{aligned}$$

denn wegen $-1\le x_1<x_2\le 1$ ist $x_1x_2<1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es ihre Umkehrfunktion f nach Satz 8.11 auch.