Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 39

a) Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist die Behauptung trivial. Sonst wählen wir ein $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) \neq 0$ und setzen $\varepsilon := |f(x_1)|$. Wegen $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ gibt es ein $M > 0$ mit

$$|f(x)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x < -M \text{ und für alle } x > M.$$

Nach Definition von ε gilt $x_1 \in [-M, M]$.

Die stetige Funktion $g : [-M, M] \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x) := |f(x)|$, nimmt auf der kompakten Menge $[-M, M]$ nach Satz 8.15 ihr Maximum an, d.h. es existiert ein $x_0 \in [-M, M]$ mit $g(x) \leq g(x_0)$ für alle $x \in [-M, M]$.

Für jedes $x \in [-M, M]$ gilt somit $|f(x)| = g(x) \leq g(x_0) = |f(x_0)|$. Auch für $x \notin [-M, M]$ ist

$$|f(x)| < \varepsilon = |f(x_1)| \overset{x_1\in[-M,M]}{\leq} |f(x_0)| \,.$$

b) Nach Satz 8.15 nimmt die stetige Funktion f auf der kompakten Menge $[a, b]$ ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x) \geq f(x_0) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Demzufolge gilt für jedes $x \in [a, b]$

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x_0)} =: C < \infty\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist also nach oben durch C beschränkt; eine untere Schranke von $\frac{1}{f}$ ist z.B. 0.

Aufgabe 40

a) und **b)** Laut Vorlesung gilt jedes $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin x > 0 \qquad \text{und} \qquad \cos x > 0\,. \tag{1}$$

Durch mehrfache Anwendung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = \cos\tfrac{\pi}{2} &= \cos(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{6}) = \cos\tfrac{\pi}{3}\,\cos\tfrac{\pi}{6} - \sin\tfrac{\pi}{3}\,\sin\tfrac{\pi}{6}\\
&= \cos(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6})\,\cos\tfrac{\pi}{6} - \sin(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6})\,\sin\tfrac{\pi}{6}\\
&= \big(\cos^2\tfrac{\pi}{6} - \sin^2\tfrac{\pi}{6}\big)\cos\tfrac{\pi}{6} - 2\cos\tfrac{\pi}{6}\,\sin^2\tfrac{\pi}{6} = \cos^3\tfrac{\pi}{6} - 3\cos\tfrac{\pi}{6}\,\sin^2\tfrac{\pi}{6}\,,
\end{aligned}$$

woraus

$$\cos^2\tfrac{\pi}{6} - 3\sin^2\tfrac{\pi}{6} = 0 \tag{2}$$

aufgrund von (1) folgt. Da $\cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} = 1$ gilt, ergibt sich hieraus $4\sin^2\frac{\pi}{6} = 1$, also $\frac{1}{2} = \big|\sin\frac{\pi}{6}\big| \overset{(1)}{=} \sin\frac{\pi}{6}$. Einsetzen in Gleichung (2) führt auf $\cos^2\frac{\pi}{6} = 3\sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$, woraus sich $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ wegen (1) ergibt. Aus den Additionstheoremen folgt weiter

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{\pi}{3} &= \sin(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6}) = 2\sin\tfrac{\pi}{6}\,\cos\tfrac{\pi}{6} = 2\cdot\tfrac{1}{2}\,\cos\tfrac{\pi}{6} = \cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\\
\cos\tfrac{\pi}{3} &= \cos(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6}) = \cos^2\tfrac{\pi}{6} - \sin^2\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} = \sin\tfrac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit den in der Vorlesung berechneten Funktionswerten von Sinus und Cosinus ergibt sich folgende Tabelle:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Aufgabe 41

a) Um Real- und Imaginärteil von z_1 zu ermitteln, betrachtet man am besten die Polarkoordinaten von $1 - i\sqrt{3}$. Die Länge dieser Zahl beträgt

$$\left|1 - i\sqrt{3}\,\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\,\right)^2} = \sqrt{4} = 2\,,$$

und nun gilt es noch, das Argument von $1 - i\sqrt{3}$ zu finden, d.h. $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{i\varphi} = 2\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\,, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Dies ist genau für $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ der Fall; damit ist $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$. Es folgt

$$z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\,\right)^{42} = \left(2e^{-i\pi/3}\right)^{42} = 2^{42}e^{42(-i\pi/3)} = 2^{42}e^{-14\pi i} = 2^{42}\,,$$

denn $e^{-14\pi i} = \cos(-14\pi) + i\sin(-14\pi) = 1$. Somit sind $\operatorname{Re} z_1 = 2^{42}$, $\operatorname{Im} z_1 = 0$, $|z_1| = 2^{42}$ und $\arg z_1 = 0$.

Wie zuvor gesehen, ist $1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Damit erhalten wir

$$z_2 \;=\; \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{201} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{201} = e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 201} = e^{134\,i\pi} = \cos\left(134\pi\right) + i\sin\left(134\pi\right) = 1\,.$$

Also sind $\operatorname{Re} z_2 = 1$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$, $|z_2| = 1$ und $\arg z_2 = 0$.

b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Wegen $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$z(t) = 1 - e^{it} = \big(e^{-it/2} - e^{it/2}\big)e^{it/2} = -2i\sin(t/2)\,e^{it/2} = 2\sin(t/2)\,e^{i(t-\pi)/2}\,,$$

wobei für die letzte Umformung $-i = e^{-i\pi/2}$ verwendet wurde. Damit haben wir bereits die gesuchte Polardarstellung von $z(t)$ gefunden, denn für alle $t \in (0, 2\pi)$ gilt $\sin(t/2) > 0$ und $\frac{1}{2}(t - \pi) \in (-\pi, \pi]$. Also hat $z(t)$ die Länge $2\sin(t/2)$ und das Argument $\frac{1}{2}(t - \pi)$.

c) Wir haben

$$z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2},$$

$$z^3 = e^{i\frac{15\pi}{4}} = \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$$

und

$$z^{150} = e^{i\frac{750\pi}{4}} = \cos\left(\frac{750\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{750\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i,$$

weil $750 = 93\cdot 8 + 6$ und somit $\frac{750\pi}{4} = 93\cdot 2\pi + \frac{6\pi}{4}$ ist.

Aufgabe 42

a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\,\cos y + \sin y\,\cos x}{\cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y} = \frac{\cos x\,\cos y\,(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y})}{\cos x\,\cos y\,(1 - \frac{\sin x\,\sin y}{\cos x\,\cos y})} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}.$$

b) Gemäß Vorlesung ist $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion von tan heißt Arcustangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Also gilt

$$\begin{aligned} \arctan(\tan(x)) &= x \qquad \text{für alle } x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ \tan(\arctan(y)) &= y \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nun seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$. Wir setzen $X := \arctan(x), Y := \arctan(y)$. Mit Hilfe der Identität $\tan(X+Y) = \frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X\,\tan Y}$ aus Teil a) erhalten wir

$$X + Y = \arctan\big(\tan(X+Y)\big) = \arctan\Big(\frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X\,\tan Y}\Big) = \arctan\Big(\frac{x+y}{1-xy}\Big).$$

c) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh y + \sinh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{2e^y}{2} = e^y.$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \cosh(nx) + \sinh(nx).$$

d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} y = \operatorname{Arsinh} x \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = e^y - e^{-y} \\ &\overset{e^y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad 2xe^y = e^{2y} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (e^y)^2 - 2xe^y + x^2 = x^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (e^y - x)^2 = x^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad |e^y - x| = \sqrt{x^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \ \text{ oder } \ e^y = \underbrace{x - \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>|x| \geq x}}_{<x-x=0} \\ &\overset{e^y > 0}{\Longleftrightarrow} \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \log(x + \sqrt{x^2+1}). \end{aligned}$$

e) Für jedes $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} y = \operatorname{Artanh} x \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \tanh y = \frac{\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})}{\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y}(x-1) = -1 - x \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad \Longleftrightarrow \quad 2y = \log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big). \end{aligned}$$

Aufgabe 43

a) Sei $x > 0$. Wegen der Injektivität von $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die gegebene Gleichung $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ äquivalent zu

$$\log(x^{\sqrt{x}}) = \log\big((\sqrt{x}\,)^x\big) \ \Leftrightarrow\ \sqrt{x}\log x = x \log\sqrt{x} \ \Leftrightarrow\ \sqrt{x}\log x = \tfrac{1}{2}x\log x \ \Leftrightarrow\ (\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}x)\log x = 0.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\log x = 0$ (also $x = 1$) oder wenn $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$ gilt. Aus Letzterem folgt $x = \frac{1}{4}x^2$ und damit $x(1 - \frac{1}{4}x) = 0$, also $x = 4$. (Man beachte $x > 0$.) Somit gilt $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ genau für $x = 1$ oder $x = 4$.

b) **i)** Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$
\begin{aligned}
2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{x-1} - 2^{x+4} = 3^{x-1} - 3^{x+1} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2^x(\tfrac{1}{2} - 2^4) = 3^x(\tfrac{1}{3} - 3) \\
&\Longleftrightarrow \quad 2^x(-\tfrac{31}{2}) = 3^x(-\tfrac{8}{3}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2^x}{3^x} = \frac{8/3}{31/2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{93} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{16}{93}\right) = \frac{\log \frac{16}{93}}{\log \frac{2}{3}} = \frac{\log 16 - \log 93}{\log 2 - \log 3}.
\end{aligned}
$$

ii) Die Gleichung $x^{\log_{10} x} = 100\,x$ ist nur für $x \in (0, \infty)$ sinnvoll. Für $x > 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
x^{\log_{10} x} = 100\,x \quad &\Longleftrightarrow \quad \log_{10}(x^{\log_{10} x}) = \log_{10}(100\,x) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)(\log_{10} x) = \log_{10}(100) + \log_{10}(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)^2 - \log_{10}(x) - 2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x - 2)(\log_{10}(x) + 1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \log_{10} x = 2 \quad \text{oder} \quad \log_{10}(x) = -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = 100 \quad \text{oder} \quad x = 10^{-1} = \tfrac{1}{10}.
\end{aligned}
$$

c) Die Identität $\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2 - \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ folgt sofort aus

$$\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \log_2\big((\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})\big) = \log_2(7 - 3) = \log_2(4) = 2.$$

Aufgabe 44

a) Wir verwenden die Potenzreihen der vorkommenden Funktionen.

$$\frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)} = \frac{(x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) - (x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots)}{x((1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots) - 1)} = \frac{\frac{2}{3!}x^3 + \cdots}{\frac{1}{2!}x^3 + \ldots} \xrightarrow{x \to 0} \frac{2 \cdot 2!}{3!} = \frac{2}{3}\,.$$

(Beim Grenzübergang kürzt man mit x^3 und verwendet die Stetigkeit von Potenzreihen.)

b) Auch hier kommen wieder Potenzreihen zum Einsatz:

$$
\begin{aligned}
\frac{a^{x^2} - \cos x}{\tan x^2} &= \frac{(\cos x^2)(e^{x^2 \log a} - \cos x)}{\sin x^2} \\
&= \frac{(\cos x^2)\big((1 + (x^2 \log a) + \frac{1}{2!}(x^2 \log a)^2 + \cdots) - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + - \cdots)\big)}{x^2 - \frac{1}{3!}(x^2)^3 + - \cdots} \\
&= \frac{(\cos x^2)(x^2(\log a + \frac{1}{2}) + \cdots)}{x^2 - \frac{1}{3!}(x^2)^3 + - \cdots} \xrightarrow{x \to 0} \log a + \tfrac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(e^x - 1)/x \xrightarrow{x \to 0} 1$ gilt. Folglich ergibt sich

$$\lim_{y \to 1} \frac{\log y}{y - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{\log y}{e^{\log y} - 1} = 1\,, \quad \text{denn} \quad \log y \xrightarrow{y \to 1} 0$$

Wir setzen nun $f(x) := \frac{2x+3}{2x+1}$. Dann gilt $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 1$ und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \big(\log(f(x))^{x+1}\big) &= \lim_{x \to \infty} \big((x + 1) \log f(x)\big) = \lim_{x \to \infty} \left((x + 1)(f(x) - 1)\frac{\log f(x)}{f(x) - 1}\right) \\
&= \lim_{x \to \infty} (x + 1)(f(x) - 1) \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{\log f(x)}{f(x) - 1} = \lim_{x \to \infty} (x + 1)(f(x) - 1) \\
&= \lim_{x \to \infty} (x + 1)\frac{2}{2x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 2}{2x + 1} = 1\,.
\end{aligned}
$$

Für den zu untersuchenden Grenzwert ergibt sich also wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^{x+1} = \lim_{x\to\infty} e^{\log(f(x))^{x+1}} = \exp\big(\lim_{x\to\infty}\log(f(x))^{x+1}\big) = e^1 = e\,.$$

d) Wieder untersuchen wir zunächst den Logarithmus:

$$\log\big((\tan x)^{\tan(2x)}\big) = \tan(2x)\log(\tan x) = \tan(2x)(\tan x - 1)\frac{\log(\tan x)}{\tan x - 1}$$

Genau wie eben folgt dann wegen $\tan x \xrightarrow{x\to\pi/4} 1$

$$\lim_{x\to\pi/4}\log\big((\tan x)^{\tan(2x)}\big) = \lim_{x\to\pi/4}\tan(2x)(\tan x - 1)\,.$$

Unter Verwendung der Additionstheoreme ergibt sich

$$\begin{aligned}\tan(2x)(\tan x - 1) &= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\cdot\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2 x - \sin^2 x}\cdot\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}\\ &= -\frac{2\sin x}{\cos x + \sin x} \xrightarrow{x\to\pi/4} -\frac{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1\,.\end{aligned}$$

Der zu berechnende Grenzwert ist somit e^{-1}.