Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12
15.12.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
9. Übungsblatt

Aufgabe 45

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche $n \in \mathbb{N}_0$ diese Funktion an der Stelle 0 stetig ist und für welche $n \in \mathbb{N}_0$ sie dort differenzierbar ist.

Aufgabe 46

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\sqrt[3]{x}}$;

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(2x)\, e^{\sin x}$;

c) $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(\log x)$;

d) $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\sin x}\,(\sin x)^x$.

Aufgabe 47

Berechnen Sie bzw. zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\,\big)$;

b) $x\log x - y\log y \leq (x-y)(1+\log x) \qquad \text{für } x > y > 0\,.$

Aufgabe 48

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := 1 - 8(e^{2x}+4)^{-1}$.

a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist, und zeigen Sie $f'(x) = 1 - (f(x))^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie damit die Ableitung der Umkehrfunktion von f.

c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie damit erneut die Ableitung von f^{-1}.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$ sowie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$.

Aufgabe 49

Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \log x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} - 1 + x\sin x}{\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}$

Aufgabe 50

Für $\lambda > 0$ ist die Funktion $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_\lambda(x) := \arctan(\lambda x)$.

a) Begründen Sie, dass 0 die einzige Nullstelle von f_λ ist.

b) Führen Sie für $\lambda = 3$ zwei Iterationsschritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{3}$ durch.

c) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x_0| \geq \frac{2}{\lambda}$ nicht konvergent ist.

Hinweis: Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $|x_n| \geq \frac{2}{\lambda}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 51

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\log x}{x}$ und entscheiden Sie, welche der beiden Zahlen e^π, π^e die größere ist.

ACHTUNG: Terminänderung
Auf vielfachen Wunsch wird die Übung am Freitag, den 23.12.2011, verschoben. Ausweichtermin ist **Mittwoch, der 21.12.2011, von 15:45 bis 17:15 Uhr im Tulla-Hörsaal (Geb. 11.40).** Am 23.12.2011 findet *keine* Übung statt.