Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 45

Zunächst sei $n \in \mathbb{N}$. Alle Funktionen f_n sind stetig an der Stelle 0, denn für $x \neq 0$ gilt

$$|f_n(x)| = \left|x^n \sin(x^{-1})\right| \leq x^n ,$$

woraus $f_n(x) \xrightarrow{x\to 0} 0 = f_n(0)$ folgt.
Die Funktion f_n ist differenzierbar in 0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n \sin(x^{-1}) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} \sin(x^{-1})$$

existiert. Für $n \geq 2$ existiert dieser Grenzwert [es handelt sich dann um $\lim_{x\to 0} f_{n-1}(x) = 0$], für $n = 1$ jedoch nicht: Für die Folge $(x_k)_k := ((\frac{\pi}{2} + k\pi)^{-1})_k$ gilt nämlich $x_k \to 0$ $(k \to \infty)$, aber

$$\frac{f_1(x_k) - f_1(0)}{x_k - 0} = \sin(x_k^{-1}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$$

konvergiert für $k \to \infty$ nicht.
Da $f_0(x) = \sin(x^{-1})$ für $x \neq 0$, zeigt diese Überlegung außerdem, dass f_0 in 0 nicht stetig ist. Nach Satz 10.1 ist f_0 in 0 auch nicht differenzierbar.

Aufgabe 46

a) Nach Definition gilt $f(x) = x^{\sqrt[3]{x}} = e^{\log(x)\cdot \sqrt[3]{x}}$ für jedes $x > 0$.

Ist $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(x) \sqrt[3]{x}$ gesetzt, so ist $f(x) = e^{g(x)} = E(g(x))$. Die Kettenregel liefert

$$f'(x) = E'(g(x))\, g'(x) = E(g(x))\, g'(x) = f(x)\, g'(x) , \qquad x \in (0, \infty) .$$

Weiter gilt nach der Produktregel

$$g'(x) = \log'(x)\, \sqrt[3]{x} + \log(x)\, (x^{1/3})' = \frac{1}{x} \sqrt[3]{x} + \log(x)\, \frac{1}{3}\, x^{-2/3} = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3 + \log(x))}{3x} , \qquad x \in (0, \infty) ,$$

also

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3 + \log(x))}{3x}\, f(x) , \qquad x \in (0, \infty) .$$

b) Anwendung der Produkt- und Kettenregel liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2\sin(2x)\, e^{\sin x} + \cos(2x)\, e^{\sin x} \cos x = \big(\cos(2x)\, \cos x - 2\sin(2x)\big)\, e^{\sin x} .$$

c) Mit Hilfe der Kettenregel erhält man für jedes $x \in (1, \infty)$

$$f'(x) = \log'(\log x)\, \log'(x) = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} .$$

d) Für jedes $x \in (0,\pi)$ gilt [Man beachte $\sin x > 0$ für alle $x \in (0,\pi)$.]

$$f(x) = x^{\sin x}\,(\sin x)^x = e^{\log(x)\cdot\sin x}\cdot e^{\log(\sin x)\cdot x} = e^{\log(x)\cdot\sin x+\log(\sin x)\cdot x} = E(\log(x)\cdot\sin x+\log(\sin x)\cdot x)\,.$$

Mehrmalige Anwendung der Ketten- und Produktregel ergibt für jedes $x \in (0,\pi)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= E'(\log(x)\cdot\sin x + \log(\sin x)\cdot x)\cdot(\log(x)\cdot\sin x + \log(\sin x)\cdot x)' \\ &= E(\log(x)\cdot\sin x + \log(\sin x)\cdot x)\cdot\Big(\frac{1}{x}\sin x + \log(x)\cos(x) + \frac{\cos x}{\sin x}x + \log(\sin x)\Big) \\ &= x^{\sin x}\,(\sin x)^x\Big(\frac{\sin x}{x} + \log(x)\cos(x) + \frac{x}{\tan x} + \log(\sin x)\Big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 47

a) Wir betrachten die Funktion $f\colon (0,\infty)\to\mathbb{R},\ y\mapsto \cos\sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x-1,x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1)-f(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = f'(\xi_x)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\big|\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\big| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x\in(x-1,x+1)}{\le} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

b) Für $t > 0$ setzen wir $f(t) := t\log t$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(t) = 1\cdot\log t + t\cdot\frac{1}{t} = 1+\log t$. Zu $x > y > 0$ existiert gemäß Mittelwertsatz ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$x\log x - y\log y = (x-y)f'(\xi) = (x-y)(1+\log\xi) \le (x-y)(1+\log x)\,.$$

Aufgabe 48

a) Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2}\cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned} 1-(f(x))^2 &= 1-\big(1-8(e^{2x}+4)^{-1}\big)^2 = 1-\big(1-16(e^{2x}+4)^{-1}+64(e^{2x}+4)^{-2}\big) \\ &= 16(e^{2x}+4)^{-1}-64(e^{2x}+4)^{-2} = 16(e^{2x}+4)^{-2}\big((e^{2x}+4)-4\big) = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} \end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

b) f hat als Bildbereich $(-1,1)$, denn $x\mapsto(e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0,\frac14)$. Da stets $f'(x)\neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Umkehrfunktion, dass $f^{-1}\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \overset{\text{a)}}{=} \frac{1}{1-(f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2} \qquad \text{für alle } y\in(-1,1)\,.$$

c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned} 1-8(e^{2x}+4)^{-1} = y &\iff (1-y)^{-1} = \tfrac18(e^{2x}+4) \iff 8(1-y)^{-1}-4 = e^{2x} \\ &\iff x = \tfrac12\log\big(8(1-y)^{-1}-4\big)\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für jedes $y\in(-1,1)$

$$(f^{-1})'(y) = \tfrac12\cdot\frac{1}{8(1-y)^{-1}-4}\cdot\frac{8}{(1-y)^2} = \frac{4}{8(1-y)-4(1-y)^2} = \frac{4}{4-4y^2} = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

d) Es gilt $f(0) = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x - \tfrac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y - y_0) + f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y + \tfrac{15}{16}\,.$$

Aufgabe 49

a) Hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils für „$\frac{0}{0}$"; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 1 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)' = (e^{x \log x})' = x^x(x \log x)' = x^x(1 + \log x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1 + \log x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1 + \log x)^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 1}{-1} = -2\,.$$

b) Wir versuchen, ob wir die Regeln von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + x^2\sin(1/x)\frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n + \frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n / \cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x\cos(1/x) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

c) Auch hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils für „$\frac{0}{0}$"; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 0 keine Nullstellen). Wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x\sin x}{\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{-2xe^{-x^2} + \sin x + x\cos x}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(4x^2 - 2)e^{-x^2} + 2\cos x - x\sin x}{-x^2(1 - x^2)^{-3/2} - (1 - x^2)^{-1/2} + 2} = 0.\end{aligned}$$

Alternativ kann man hier die Potenzreihendarstellungen von e^{-x^2} und $\sin x$ verwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x\sin x}{\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \ldots) - 1 + (x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \ldots)}{\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1} \\ &= \lim_{x\to 0} x\left[(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{3!} + \ldots) + (-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \ldots)\right] \cdot \frac{x^3(\sqrt{1 - x^2} - x^2 + 1)}{1 - x^2 - x^4 + 2x^2 - 1} = 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 50

Für $\lambda > 0$ ist die Funktion $f_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_\lambda(x) := \arctan(\lambda x)$.

a) Es gilt $f_\lambda(0) = 0$. Da f_λ injektiv ist, besitzt f_λ keine weiteren Nullstellen.

b) Nach der Kettenregel ist die Funktion f_3 auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f_3'(x) = \arctan'(3x) \cdot 3 = \frac{3}{1 + (3x)^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Die ersten beiden Iterationsschritte des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = \frac{1}{3}$ lauten

$$x_1 = x_0 - \frac{f_3(x_0)}{f_3'(x_0)} = \frac{1}{3} - \frac{\arctan(1)}{\frac{3}{1+1}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6},$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f_3(x_1)}{f_3'(x_1)} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{\arctan(1-\frac{\pi}{2})}{\frac{3}{1+(1-\frac{\pi}{2})^2}} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{1+(1-\frac{\pi}{2})^2}{3}\arctan(1-\tfrac{\pi}{2}).$$

c) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x_0| \geq \frac{2}{\lambda}$. Wir wollen zeigen, dass das Newton-Verfahren nicht konvergent ist, d.h. dass die durch

$$x_{n+1} := x_n - f_\lambda'(x_n)^{-1} f_\lambda(x_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht konvergiert. Zuerst beweisen wir mittels vollständiger Induktion: $|x_n| \geq \frac{2}{\lambda}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Nach Wahl des Startwerts x_0 ist $|x_0| \geq \frac{2}{\lambda}$ erfüllt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte $|x_n| \geq \frac{2}{\lambda}$ (IV). Zu zeigen ist, dass dann $|x_{n+1}| \geq \frac{2}{\lambda}$ gilt.

Per Definition gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_\lambda(x_n)}{f_\lambda'(x_n)} = x_n - \frac{\arctan(\lambda x_n)}{\frac{\lambda}{1+\lambda^2 x_n^2}} = x_n - \frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1+\lambda^2 x_n^2)}{\lambda}.$$

Nach (IV) ist $\lambda\,|x_n| \geq 2$. Wegen der Monotonie von arctan folgt $\arctan(\lambda\,|x_n|) \geq \arctan(2) \geq 1$ und damit

$$\left|\frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1+\lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\right| = \arctan(\lambda\,|x_n|)\,\frac{(1+\lambda^2 x_n^2)}{\lambda} \geq 1 \cdot \lambda x_n^2 = \underbrace{\lambda\,|x_n|}_{\geq 2}\,|x_n| \geq 2\,|x_n|.$$

Die umgekehrte Dreiecksungleichung liefert

$$|x_{n+1}| \geq \left|\frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1+\lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\right| - |x_n| \geq 2\,|x_n| - |x_n| = |x_n| \overset{\text{(IV)}}{\geq} \frac{2}{\lambda}.$$

Daher ist $(x_n)_n$ keine Nullfolge, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert nicht gegen die Nullstelle von f_λ.

Dem vorigen Induktionsbeweis können wir entnehmen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert: Wegen

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1+\lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\right| \geq 2\,|x_n| \geq \frac{4}{\lambda} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und somit divergent.

Aufgabe 51

Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\log x}{x}$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f'. Für jedes $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\log x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2} \begin{cases} > 0 & \text{für } x < e, \\ < 0 & \text{für } x > e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases} (0,e) \\ (e,\infty) \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$. Für $x, y \in (0,\infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x \quad &\iff \quad e^{y\cdot\log(x)} > e^{x\cdot\log(y)} \overset{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\iff} y\cdot\log(x) > x\cdot\log(y) \\ &\iff \quad \frac{\log(x)}{x} > \frac{\log(y)}{y} \quad \iff \quad f(x) > f(y). \end{aligned}$$

Da $\pi > e$ und f auf (e,∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi) < f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi > \pi^e$.