Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12
21.12.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
10. Übungsblatt

Aufgabe 52

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar. Die Folge (x_n) konvergiere streng monoton fallend gegen 0 und es gelte $f(x_n) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ gelten muss.

Aufgabe 53

a) Begründen Sie, dass jede der folgenden Funktionen ihr Maximum und Minimum annimmt, und berechnen Sie diese:

i) $f\colon [-3,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 4x^2 + 2\,;$

ii) $g\colon [0,10] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -6x + (|x-3| + 2)^2\,.$

b) Für eine physikalische Größe werden bei n Messungen die Messwerte $a_1, \dots, a_n$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man dann die Zahl a an, die durch

$$f(a) = \min\{\, f(x) : x \in \mathbb{R}\,\} \quad \text{mit} \quad f(x) := \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$$

definiert wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a.

Aufgabe 54

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ von $f\colon x \mapsto \log(1+x)$ und zeigen Sie

$$0 \le \log(1+x) - T_4(f;0)(x) \le \tfrac{1}{5}\, x^5 \qquad \text{für alle } x \ge 0\,.$$

b) Bestimmen Sie Zahlen a, b und c, für die gilt:

$$\bigl|\log(2+x) - a - bx\bigr| \le c\, x^2 \qquad \text{für alle } x \in [-1,1]\,.$$

c) Approximieren Sie die Funktion $f(x) := e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ durch das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an so, dass für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\bigl|f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x)\bigr| \le C\,\bigl|x - \tfrac{1}{2}\bigr|^3\,.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 55

a) Zeigen Sie, dass für alle $|x| < 1$ gilt

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\,.$$

b) Bestimmen Sie durch gliedweises Differenzieren den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 - n} \qquad \text{für } |x| < 1\,.$$

Hinweis: Ist $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y \log y - y$, so ist g differenzierbar und $g'(y) = \log y,\ y > 0$.

c) Die Funktion $f \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x) := \log(1 - x^2)$. Berechnen Sie $f^{(20)}(0)$ sowie $f^{(31)}(0)$.

Aufgabe 56

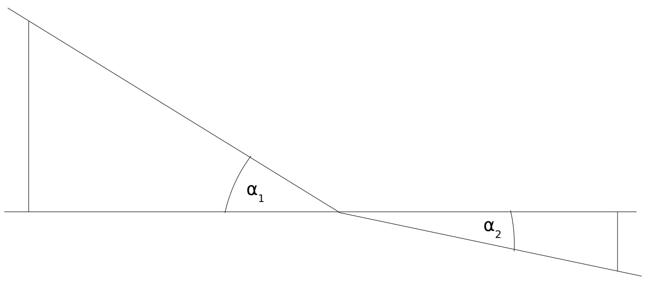
Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := x^2 + 2x - 3$. Berechnen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $1/f$ darstellt. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Aufgabe 57

Ein Lichtstrahl durchlaufe ein Medium M_1 mit Lichtgeschwindigkeit c_1, treffe unter dem Winkel α_1 auf die ebene Grenzschicht zum Medium M_2 mit Lichtgeschwindigkeit c_2 und trete unter dem Winkel α_2 in dieses Medium ein. Es gelte das Fermatsche Prinzip: das Licht nimmt den Weg, der die kürzeste Zeit erfordert. Leiten Sie daraus das Brechungsgesetz von Snellius her:

$$\frac{\cos \alpha_1}{c_1} = \frac{\cos \alpha_2}{c_2}.$$

Skizze:



Frohe Weihnachten und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr 2012 !

Hinweis:
Die **Klausur zu HM I** findet am Montag, den 12.03.2012, 08:00-10:00 Uhr statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich, welche über das KIT-Studierendenportal vorgenommen werden kann. **Anmeldeschluss ist Freitag, der 10.02.2012.**