Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 52

Die Funktion f ist differenzierbar, also insbesondere stetig. Folglich gilt

$$f(0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\,.$$

Gemäß Mittelwertsatz (Beachte: $x_n > 0$) existiert zu jedem x_n ein $\xi_n \in (0, x_n)$ mit

$$f'(\xi_n) = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{0-0}{x_n - 0} = 0\,.$$

Wegen $x_n \to 0$ gilt auch $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$, und weil f' stetig ist, folgt

$$f'(0) = f'(\lim_{n\to\infty} \xi_n) = \lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\,.$$

Da wir wissen, dass f' differenzierbar ist, können wir $f''(0)$ bestimmen, indem wir eine spezielle Folge, die gegen 0 konvergiert, wählen: Es ergibt sich

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n) - f'(0)}{\xi_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{0-0}{\xi_n - 0} = 0\,.$$

Aufgabe 53

a) Sowohl f als auch g sind stetig und auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall definiert. Daher nehmen diese Funktionen ihr Maximum und Minimum an (vgl. Satz 8.15).

i) Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-3, 2]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f. Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)\,.$$

Die Nullstellen von f' lauten 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen neben diesen drei Stellen (die alle im Intervall $[-3, 2]$ liegen!) auch die Ränder des Intervalls $[-3, 2]$ untersuchen: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum von f ist folglich 47, das Minimum ist -2.

ii) Die Funktion g ist außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte von $[0, 10]$, den Punkt 3 sowie alle Punkte im Innern von $[0, 10] \setminus \{3\}$ untersuchen, an denen die Ableitung von g verschwindet. Auf $[0, 3]$ gilt

$$g(x) = -6x + (3 - x + 2)^2 = -6x + (5 - x)^2 = x^2 - 16x + 25\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 16\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8 \notin (0, 3)$. Also hat g' in $(0, 3)$ keine Nullstelle. Auf $[3, 10]$ gilt

$$g(x) = -6x + (x - 1)^2 = x^2 - 8x + 1\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 8\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3, 10)$. Wir müssen also die Punkte $0, 3, 4, 10$ untersuchen: $g(0) = 25$, $g(3) = -14$, $g(4) = -15$, $g(10) = 21$. Damit ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von g.

b) Wir untersuchen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$ auf Extremstellen. Nach der Kettenregel ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x-a_k) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

Also ist

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k =: x_0\,.$$

Für $x < x_0$ ist $f'(x) < 0$ (dort fällt f) und für $x > x_0$ ist $f'(x) > 0$ (dort wächst f), also ist x_0 die Stelle eines relativen Minimums von f. Wegen $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ nimmt die stetige Funktion f in x_0 ihr globales Minimum an. Deshalb ist $a = x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, d.h. das anzugebende Messergebnis entspricht dem arithmetischen Mittel aller Messwerte.

Aufgabe 54

a) Die durch $f(x) := \log(1+x)$ definierte Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f''''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,,$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) = 1\,, \qquad f''(0) = -1\,, \qquad f'''(0) = 2\,, \qquad f''''(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_4(f;0)(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + x + \tfrac{1}{2!}\,(-1)x^2 + \tfrac{1}{3!}\,2x^3 + \tfrac{1}{4!}\,(-6)x^4 \\ &= x - \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\,. \end{aligned}$$

Sei $x \geq 0$. Um die Abschätzung $0 \leq \log(1+x) - T_4(f;0)(x) \leq \frac{1}{5}\,x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_4(f;0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!}\,(x-0)^{4+1}\,,$$

also mit

$$f(x) - T_4(f;0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5\,.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leq \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 \leq \frac{1}{5}\,x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \geq 0\,, \\ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \leq \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1+0)^5}\,x^5 = \frac{1}{5}\,x^5\,. \end{aligned}$$

b) Für die durch $f(x) := \log(2+x)$ gegebene Funktion $f\colon (-2,\infty) \to \mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}\,.$$

Also haben wir $f(0) = \log 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1]$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2 = \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\,.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$\left|f(x) - \log 2 - \frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\right| \le \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Wir können somit $a = \log 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

c) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f'''(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}\,.$$

Daher sind

$$f(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + \tfrac{2}{3}\,, \qquad f'(\tfrac{1}{2}) = -e^{-1/2} - \tfrac{4}{9}\,, \qquad f''(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + 2\cdot\tfrac{8}{27} = e^{-1/2} + \tfrac{16}{27}$$

und das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ lautet

$$\begin{aligned} T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}(x-\tfrac{1}{2})^k = f(\tfrac{1}{2}) + f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2 \\ &= e^{-1/2} + \tfrac{2}{3} + (-e^{-1/2} - \tfrac{4}{9})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(e^{-1/2} + \tfrac{16}{27})(x-\tfrac{1}{2})^2\,. \end{aligned}$$

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen $\frac{1}{2}$ und x mit

$$f(x) = T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) + \frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}(x-\tfrac{1}{2})^{2+1}\,,$$

also mit

$$\left|f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x)\right| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}\,|x-\tfrac{1}{2}|^3\,.$$

Wegen $\xi \ge 0$ ergibt sich

$$\frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \frac{1}{6}\Big(e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4}\Big) = \frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4} \le \frac{1}{6} + \frac{1}{(1+0)^4} = \frac{7}{6}\,;$$

demnach gilt die gewünschte Abschätzung z.B. mit $C = \frac{7}{6}$.

Aufgabe 55

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

absolut konvergent und damit konvergent, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} - 1\,.$$

Somit folgt für den Konvergenzradius R dieser Potenzreihe $R \geq 1$. Gemäß 10.16 ist f auf $(-1,1)$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}\,.$$

Wegen

$$\log'(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

stimmen die Ableitungen von f und $x \mapsto \log(1+x)$ überein. Daher unterscheiden sich beide Funktionen nur durch eine additive Konstante. Wegen $f(0) = 0 = \log(1+0)$ ist diese $= 0$ und die behauptete Identität ist bewiesen.

Bemerkung: Die Reihendarstellung von $g(x) := \log(1+x)$ um 0 lässt sich auch mit Hilfe des Satzes von Taylor herleiten. Man verwendet dazu $g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$.

b) Bezeichnen wir die Funktion, die durch die Reihe definiert wird, mit f (man beachte, dass f wegen $\sum_{n=2}^{\infty} |(-1)^n \frac{x^n}{n^2-n}| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} - 1 - |x|$ wohldefiniert ist!), so gilt für $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^{n-1}}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\,.$$

Diese Reihe stellt laut a)-Teil die Funktion $x \mapsto \log(1+x)$ dar, d. h. es ist $f'(x) = \log(1+x)$. Aufgrund von $(y \log y - y)' = \log y$ folgt

$$f(x) = (1+x)\log(1+x) - (1+x) + c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0$ ergibt sich $c = 1$. Somit erhält man als Endergebnis

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-2}}{n^2-n} = (1+x)\log(1+x) - x\,.$$

Bemerkung: Man kommt auch ohne Differenzieren aus; wegen der Darstellung

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n} \right) = x \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

lässt sich der Wert direkt mit Hilfe der Logarithmusreihe aus a) ermitteln.

c) Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = \log\big((1-x)(1+x)\big) = \log(1-x) + \log(1+x) &\overset{a)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n + (-1)^{n+1}}{n}\, x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-1 + (-1)^{n+1}}{n}}_{=:a_n}\, x^n \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 10.16 der Vorlesung gesehen, ergibt sich

$$\begin{aligned} f^{(20)}(0) &= 20!\, a_{20} = 20!\, \frac{-1-1}{20} = -2 \cdot 19!\,, \\ f^{(31)}(0) &= 31!\, a_{31} = 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 56

Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad \text{also} \qquad 1 = (x^2+2x-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n .$$

Nun gilt wegen $x^2+2x-3 = (x+1)^2-4$

$$\begin{aligned}(x^2+2x-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2}-4a_n)(x+1)^n .\end{aligned}$$

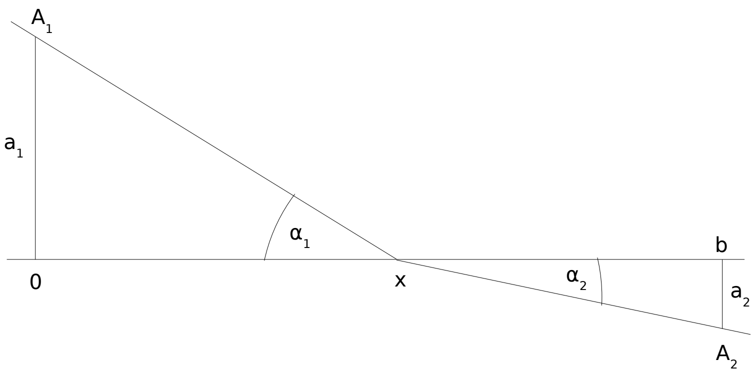
Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen (Satz 10.17) hat diese Potenzreihe den Wert 1 genau dann, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$-4a_0 = 1, \qquad -4a_1 = 0, \qquad a_{n-2}-4a_n = 0 \quad \text{für alle } n \geq 2 .$$

Es folgt: $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ und $a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}$ für $n \geq 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = -(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Wegen $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = (\frac{1}{4})^{(1+1/k)/2} \xrightarrow{k\to\infty} (\frac{1}{4})^{1/2} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = 0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,)^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$.

Aufgabe 57

Wir ergänzen die Zeichnung auf dem Aufgabenblatt wie folgt:



Es bezeichne x den Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der ebenen Grenzschicht. Die Zeit, die das Licht vom Ausgangspunkt A_1 zum Endpunkt A_2 benötigt, ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{c_1}\sqrt{a_1^2+x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{a_2^2+(b-x)^2}.$$

Hierdurch wird eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ definiert. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{a_1^2+x^2}} - \frac{b-x}{c_2\sqrt{a_2^2+(b-x)^2}}$$

und

$$f''(x) = \frac{a_1^2}{c_1(\sqrt{a_1^2+x^2})^3} - \frac{a_2^2}{c_2(\sqrt{a_2^2+(b-x)^2})^3}.$$

Da $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, ist f' streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$. Wegen $f'(0) < 0$ und $f'(b) > 0$ folgt aus dem Zwischenwertsatz und der Injektivität von f', dass f' genau eine Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ besitzt. Nach 10.15 hat f in x_0 ein lokales Minimum; da außerdem $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ gilt, nimmt f in x_0 ihr globales Minimum an. D.h. ist x_0 der Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der ebenen Grenzschicht, so ist die benötigte Zeit minimal. Aus $f'(x_0) = 0$ folgt nun mit $\cos\alpha_1 = \frac{x_0}{\sqrt{a_1^2+x_0^2}}$ und $\cos\alpha_2 = \frac{b-x_0}{\sqrt{a_2^2+(b-x_0)^2}}$ die Behauptung.