Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 58

Sei $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. Zuerst bemerken wir, dass f als stetige Funktion über $[1,2]$ integrierbar ist. Betrachten wir für ein $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $Z_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ des Intervalls $[1,2]$ mit $x_j := 1 + j/n$ für $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, so gilt für die Teilintervalle $I_j := [x_{j-1}, x_j]$

$$m_j := \inf f(I_j) = f(x_{j-1}) = e^{x_{j-1}} \qquad \text{und} \qquad M_j := \sup f(I_j) = f(x_j) = e^{x_j}\,,$$

denn f ist monoton wachsend. Somit ergibt sich wegen $|I_j| = x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$ für die Untersumme von f bezüglich Z_n

$$\begin{aligned} s_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} m_j\,|I_j| = \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{x_{j-1}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{1+(j-1)/n} = \frac{e}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{(j-1)/n} = \frac{e}{n}\sum_{l=0}^{n-1}(e^{1/n})^l \\ &= \frac{e}{n}\cdot\frac{1-(e^{1/n})^n}{1-e^{1/n}} = \frac{e(1-e)}{n(1-e^{1/n})} = e(e-1)\frac{1/n}{e^{1/n}-1} \xrightarrow{n\to\infty} e(e-1)\,, \end{aligned}$$

und daraus folgt für das untere Integral von f

$$s_f = \sup\{\, s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [1,2]\,\} \geq \lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = e(e-1)\,.$$

Für die Obersumme von f bezüglich Z_n erhält man

$$S_f(Z_n) = \sum_{j=1}^{n} M_j\,|I_j| = \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{x_j}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{1+j/n} = \frac{e^{1+1/n}}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{(j-1)/n} = e^{1/n} s_f(Z_n)\,,$$

so dass auch $S_f(Z_n) \to e(e-1)$ für $n \to \infty$ folgt. Damit besteht die Abschätzung

$$S_f = \inf\{\, S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [1,2]\,\} \leq \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = e(e-1)$$

für das obere Integral. Da stets $s_f \leq S_f$ gilt, haben wir $e(e-1) \leq s_f \leq S_f \leq e(e-1)$, d. h. $s_f = S_f = e(e-1)$, und dies bedeutet $\int_1^2 f(x)\,dx = e(e-1)$.
Bemerkung: Alternativ kann man nur s_f berechnen und dann Satz 11.6 anwenden. Da $f \in R[1,2]$ ist, folgt aus $\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = e(e-1)$ direkt, dass $s_f = S_f = \int_1^2 f(x)\,dx = e(e-1)$ gilt.

Aufgabe 59

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\Big)e^{-\frac{k}{n}}\,.$$

Ist $x_k^{(n)} := \frac{k}{n}$ für $k = 0,1,\ldots,n$ gesetzt, so ist $Z_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\} = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ und $\xi^{(n)} := (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1)$ ein zu Z_n passender Zwischenvektor. Wir definieren $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}$ und erhalten eine Riemann-Summe $\sigma_f(\xi^{(n)}, Z_n) := \sum_{k=1}^n (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) f(x_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}) e^{-\frac{k}{n}}$. Da f als stetige Funktion über $[0,1]$ integrierbar ist und da $|Z_n| = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, ergibt sich gemäß Satz 11.6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}} = \lim_{n\to\infty} \sigma_f(\xi^{(n)}, Z_n) = \int_0^1 f\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-1} = 1 - \tfrac{1}{e}\,.$$

b) Hier betrachten wir die Zerlegung $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 3\}$ des Intervalls $[0,3]$ und den passenden Zwischenvektor $\xi^{(n)} := (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 3)$. Erneut konvergiert die Feinheit von Z_n für $n \to \infty$ gegen Null. Mit der Funktion $g\colon [0,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\pi x)$ gilt nach Satz 11.6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{3n} \sin\left(\tfrac{k\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{3n} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \sin\left(\tfrac{k\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sigma_g(\xi^{(n)}, Z_n) = \int_0^3 g\,dx$$
$$= \int_0^3 \sin(\pi x)\,dx = \frac{1-\cos(3\pi)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Aufgabe 60

a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \tfrac{1}{8}(1+2x)^4\,\Big|_{x=0}^1 = \tfrac{1}{8}(3^4 - 1^4) = 10\,.$$

b) Wir zerlegen das Intervall:

$$\int_{-2}^2 |x-1|\,dx = \int_{-2}^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx = \int_{-2}^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$
$$= \left(x - \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^1 + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^2$$
$$= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) - (-2-2) + (2-2) - \left(\tfrac{1}{2} - 1\right) = 5\,.$$

c) Wegen $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$ ist $\frac{1}{2}\sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x \cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{x=0}^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}\left(\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi) - \sin^2(0)\right) = \tfrac{1}{2}(1-0) = \tfrac{1}{2}\,.$$

d) Auch hier kann man die Stammfunktion leicht finden:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}\,dx$$
$$= -\tfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}\,\Big|_{x=0}^1 = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - \sqrt{9}\,) = \tfrac{1}{4}(3 - \sqrt{5}\,)\,.$$

e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t) = \sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $g'(t)\,dt = (2\sqrt{t}\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t = 1$ entspricht $x = g(1) = 1$ und $t = 4$ entspricht $x = g(4) = 2$.

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt = \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$
$$= \int_1^2 \frac{2}{1+x}\,dx = 2\log|1+x|\,\Big|_{x=1}^2 = 2\big(\log(3) - \log(2)\big) = 2\log\tfrac{3}{2}\,.$$

f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x) = \log x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\int_1^e x\log x\,dx = \int_1^e f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_{x=1}^e - \int_1^e f'(x)g(x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\log x\big|_{x=1}^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2\log e - \log 1) - \int_1^e \tfrac{1}{2}x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}e^2 - \left(\tfrac{1}{4}x^2\right)\big|_{x=1}^e = \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.$$

g) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x \, dx = -\cos x\big|_{x=(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi) + \cos((k-1)\pi)$$
$$= -(-1)^k + (-1)^{k-1} = (-(-1)+1)(-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}\,.$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat, ist $\sin x$ auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder ≥ 0 oder ≤ 0. Folglich gilt nach Satz 11.3 (2)

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| \; dx = \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x \, dx \right| = 2\,.$$

h) Wieder kommt partielle Integration zum Einsatz: $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = \sin x$.

$$\int_0^\pi (\sin x)^2 \, dx = \sin x \cdot (-\cos x)\big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi \cos x \cdot (-\cos x) \, dx = \int_0^\pi (\cos x)^2 \, dx$$
$$= \int_0^\pi \left(1 - (\sin x)^2\right) dx = \pi - \int_0^\pi (\sin x)^2 \, dx.$$

Betrachtet man nun den ersten und letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2\int_0^\pi (\sin x)^2 \, dx = \pi\,, \qquad \text{also} \qquad \int_0^\pi (\sin x)^2 \, dx = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

i) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d.h. $x = t^2$. Dann ist $dx = 2t\,dt$ und aus $x : 1 \to 4$ ergibt sich $t : 1 \to 2$, also ist

$$\int_1^4 \arctan\sqrt{\sqrt{x} - 1}\, dx = \int_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}\,) \cdot 2t\, dt\,;$$

nun substituieren wir $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2 + 1$, $dt = 2u\,du$, $t : 1 \to 2$ wird zu $u : 0 \to 1$,

$$= \int_0^1 \arctan(u) \cdot 2(u^2+1) \cdot 2u\, du = \int_0^1 (4u^3 + 4u)\arctan(u)\, du\,.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.) Dann führen wir eine partielle Integration aus mit $f(u) = \arctan(u)$ und $g'(u) = 4u^3 + 4u$:

$$= (u^4 + 2u^2)\arctan(u)\,\big|_{u=0}^{1} - \int_0^1 (u^4 + 2u^2)\frac{1}{1+u^2}\, du$$
$$= 3\arctan(1) - \int_0^1 \frac{(u^2+1)^2 - 1}{1+u^2}\, du = \tfrac{3}{4}\pi - \int_0^1 (u^2+1)\, du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\, du$$
$$= \tfrac{3}{4}\pi - (\tfrac{1}{3}u^3 + u)\big|_{u=0}^{1} + \arctan(u)\big|_{u=0}^{1} = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4}\pi = \pi - \tfrac{4}{3}\,.$$

Aufgabe 61

a) Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = \arcsin\, x$ und $g'(x) = 1$:

$$\int \arcsin\, x\, dx = \int 1 \cdot \arcsin\, x\, dx = x\, \arcsin\, x - \int x\, \arcsin'(x)\, dx$$
$$= x\,\arcsin\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x\,\arcsin\, x + \sqrt{1-x^2}\,.$$

b) Hier substituieren wir $u = e^x$. Dies liefert $du = e^x\, dx$ und damit

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{1}{u^2+1}\, du\big|_{u=e^x} = \arctan(u)\big|_{u=e^x} = \arctan(e^x)\,.$$

c) Wir substituieren $u = 1 - x$. Dies liefert $du = (-1)\, dx$, also

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx = \int \frac{1-u}{\sqrt{u}}(-1)\, du\big|_{u=1-x} = \int (u^{1/2} - u^{-1/2})\, du\big|_{u=1-x} = \tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\big|_{u=1-x}$$
$$= \tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2}\,.$$

Aufgabe 62

Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x \sin(e^t)\ dt$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$.
Dann ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \sin(e^x)$. Bekanntlich ist auch g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) = \cos x$. Wegen $F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ liefert die Kettenregel, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$F'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = \sin(e^{\sin x})\, \cos(x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 63

a) In der Übung wurde gezeigt: *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und hat höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen in $[a,b]$, so gilt $f \in R[a,b]$.*
Seien $f \in R[a,b]$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gelte $f(x) \neq g(x)$ für höchstens endlich viele $x \in [a,b]$.

Setze $h := f - g$ sowie $M := \{x \in [a,b] :\ f(x) \neq g(x)\}$. Wegen $h(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \setminus M$ ist h auf $[a,b] \setminus M$ stetig. Da M (nach Voraussetzung) endlich viele Elemente enthält, ist h in höchstens endlich vielen Stellen in $[a,b]$ unstetig und damit gemäß obiger Aussage über $[a,b]$ integrierbar. Nach Satz 11.3 (2) gilt nun mit $h, f \in R[a,b]$ auch $g = f - h \in R[a,b]$.

Es verbleibt $\int_a^b h\, dx = 0$ zu beweisen, denn dann liefert Satz 11.3 (2): $\int_a^b g\, dx = \int_a^b f\, dx$.
Wegen $|\int_a^b h\, dx| \leq \int_a^b |h|\, dx$ genügt es zu zeigen:

$$\int_a^b |h|\, dx = 0\,.$$

Es gilt $|h(x)| > 0$ für alle $x \in M$ und $h(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \setminus M$. Da M endlich ist, folgt $s_{|h|}(Z) = 0$ für jede Zerlegung Z von $[a,b]$. Demnach ist das untere Integral $s_{|h|} = 0$ und wegen $h \in R[a,b]$ ist $\int_a^b |h|\, dx = s_{|h|} = 0$.

b) Es sei zunächst $n = 1$. Wir betrachten die Treppenfunktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = c_1$ für $x \in (a,b)$. Die Funktionswerte in den Randpunkten sind nicht vorgegeben. Ferner sei $\tilde{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}(x) = c_1$ für $x \in [a,b]$. Dann ist φ beschränkt, $\tilde{\varphi} \in R[a,b]$ und $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$ für $x \in [a,b] \setminus \{a,b\}$. Nach a) gilt folglich $\varphi \in R[a,b]$ mit

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^b \tilde{\varphi}(x)\, dx = c_1(b-a).$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach obiger Überlegung ist φ auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$, integrierbar mit

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi(x)\, dx = c_j(x_j - x_{j-1}).$$

Die mehrfache Anwendung von Satz 11.7 (1) liefert nun, dass $\varphi \in R[a,b]$ ist mit

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi(x)\, dx = \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1}).$$