Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12
19.01.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 64

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen.

a) $y' = \left(x + \frac{2}{x}\right)y$ **b)** $y' = 2xy + x$ **c)** $y' + y\cos x = \sin x \, \cos x$

Aufgabe 65

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= x\sqrt{1-y^2}\,, \\ y(0) &= y_0\,, \qquad \text{wobei } y_0 \in [-1,1]\,. \end{aligned}$$

Für welche y_0 existiert eine eindeutige Lösung?

Aufgabe 66

Bestimmen Sie die maximale Lösung folgender Anfangswertprobleme:

a) $y' = \frac{x-4xy}{1+x^2}, \quad y(1) = 1;$

b) $y' = \frac{1+x}{3}y^{-2} + y, \quad y(0) = 2.$

Hinweis zu b): Es handelt sich hierbei um eine sogenannte *Bernoullische Differentialgleichung.* Multiplizieren Sie zunächst die Gleichung mit y^2 und substituieren Sie anschließend $z = y^3$.

Aufgabe 67

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten für gegebene $(x_0, y_0) \in I \times J$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{AWP}$$

a) Zeigen Sie: Ist $\tilde{I} \subseteq I$ und $\phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ Lösung von (AWP), so ist $\tilde{\phi} : -\tilde{I} \to \mathbb{R}$, $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$, $x \in -\tilde{I}$, eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= -f(-x,y) \\ y(-x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Dabei ist $-\tilde{I} = \{-x : x \in \tilde{I}\}$.

b) Zeigen Sie: Sind $a, b \in I$ mit $a < x_0 < b$ und $\phi_1 : [a, x_0] \to \mathbb{R}$, $\phi_2 : [x_0, b] \to \mathbb{R}$ Lösungen von (AWP), so ist auch

$$\phi : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & x \in [a, x_0), \\ \phi_2(x), & x \in [x_0, b], \end{cases}$$

eine Lösung von (AWP).

Aufgabe 68

a) Sei $f \in C([a, b])$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0\,.$$

b) Sei $f \in C([a, b])$ mit $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Hinweis:
Die **Klausur zu HM I** findet am Montag, den 12.03.2012, 08:00-10:00 Uhr statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich, welche über das KIT-Studierendenportal vorgenommen werden kann. **Anmeldeschluss ist Freitag, der 10.02.2012.**