Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 64

a) Aus $y' = (x+\frac{2}{x})y$ folgt durch Trennung der Veränderlichen $\frac{y'}{y} = x+\frac{2}{x}$ und wir erhalten durch Integration für $x \neq 0$

$$\log(|y|) = \int \frac{y'}{y}\,dy = \int x + \frac{2}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2\log(|x|) + c = \tfrac{1}{2}x^2 + \log(x^2) + c \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich

$$|y(x)| = e^{x^2/2+\log(x^2)+c} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R},$$

also

$$y(x) = e^c\,x^2\,e^{x^2/2} \qquad \text{oder} \qquad y(x) = -e^c\,x^2\,e^{x^2/2} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

Da überdies $y = 0$ eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist, folgt

$$y(x) = C\,x^2\,e^{x^2/2} \qquad \text{für } C \in \mathbb{R}.$$

b) Hier handelt es sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung. Die Lösungen y_H der homogenen Gleichung $y_H' = 2xy_H$ sind $y_H(x) = ce^{x^2}$ für $c \in \mathbb{R}$. Die Lösungen y der inhomogenen Gleichung $y' = 2xy + x$ kann man mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel

$$y(x) = ce^{x^2} + e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}t\,dt$$

erhalten. Wegen

$$\int_0^x e^{-t^2}t\,dt = -\tfrac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2}(-2t)\,dt = -\tfrac{1}{2}\big[e^{-t^2}\big]_0^x = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + \tfrac{1}{2}$$

ist

$$y(x) = ce^{x^2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{x^2} = Ce^{x^2} - \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } C \in \mathbb{R}\,.$$

c) Die homogene Gleichung $y' + y\cos x = 0$ bzw. $y' = -y\cos x$ hat die allgemeine Lösung

$$y_H(x) = e^{\int -\cos x\,dx} = e^{-\sin x+\tilde{c}} = ce^{-\sin x} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}\,.$$

Eine Lösung y_P der inhomogenen Gleichung $y' + y\cos x = \sin x\,\cos x$ finden wir mit Variation der Konstanten

$$\begin{aligned} y_P(x) &= e^{-\sin x}\int e^{\sin x}\sin x\,\cos x\,dx \overset{\text{Subst. } t=\sin x}{=} e^{-\sin x}\int te^t\,dt\big|_{t=\sin x} \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} e^{-\sin x}\big(te^t - \int e^t\,dt\big|_{t=\sin x}\big) = e^{-\sin x}\big(te^t - e^t + C\big|_{t=\sin x}\big) \\ &= e^{-\sin x}\big(\sin x\,e^{\sin x} - e^{\sin x} + C\big) = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x} \qquad \text{für } C \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Beispielsweise für $C = 0$ ist $y_P(x) = \sin x - 1$. Die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung $y' + y\cos x = \sin x\,\cos x$ erhalten wir, indem wir zu einer speziellen Lösung des inhomogenen Problems y_P die allgemeine Lösung y_H des homogenen Problems addieren:

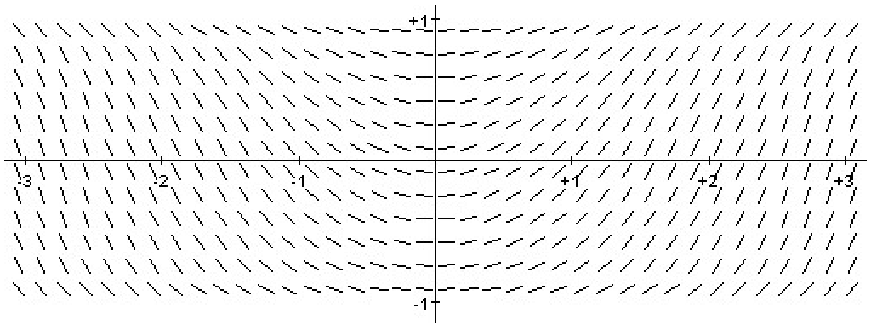
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = ce^{-\sin x} + \sin x - 1 \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 65

Gesucht sind alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= x\sqrt{1-y^2}\,, \\ y(0) &= y_0\,, \qquad \text{wobei } y_0 \in [-1,1]\,. \end{aligned} \tag{AWP}$$

Man kann sofort ablesen: Jede Lösung y der Gleichung $y' = x\sqrt{1-y^2}$ ist auf $(0,\infty)$ monoton wachsend (weil dann $y'(x) \geq 0$ für alle $x \in (0,\infty)$ gilt) und auf $(-\infty,0)$ monoton fallend (weil $y'(x) \leq 0$ für alle $x \in (-\infty,0)$ gilt).



Richtungsfeld von $y' = x\sqrt{1-y^2}$.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass für den Anfangswert $y(0) = y_0 \in (-1,1)$ gilt. Trennung der Veränderlichen führt auf

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{1-y(t)^2}}\,dt = \int_0^x t\,dt$$

und mittels der Substitution $\eta = y(t)$, $d\eta = y'(t)\,dt$ erhält man unter Berücksichtigung von $y(0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta = \frac{x^2}{2}\,,$$

woraus

$$\arcsin y(x) = \frac{x^2}{2} + \arcsin y_0$$

folgt. Wegen $\arcsin : (-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist der Definitionsbereich von y enthalten in

$$\begin{aligned} I :&= \left\{x \in \mathbb{R} :\ \tfrac{x^2}{2} + \arcsin y_0 \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 \in (-\pi - 2\arcsin y_0, \pi - 2\arcsin y_0)\right\}. \end{aligned}$$

Im Fall $y_0 > -1$ gilt $\arcsin y_0 > -\frac{\pi}{2}$, also ist $-\pi - 2\arcsin y_0 < 0$. Damit ergibt sich

$$I = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 \in [0, \pi - 2\arcsin y_0)\right\} = \left(-\sqrt{\pi - 2\arcsin y_0}, \sqrt{\pi - 2\arcsin y_0}\right).$$

Im Fall $|y_0| < 1$ gilt also für die Lösung y von (AWP)

$$y(x) = \sin\left(\tfrac{x^2}{2} + \arcsin y_0\right) \qquad \text{für } x \in I\,.$$

Offenbar erfüllen sowohl $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, als auch $y(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$, die Differentialgleichung $y' = x\sqrt{1-y^2}$.

Wir fassen zusammen:

Im Fall $y_0 = 1$ (dann ist $I = \emptyset$ wegen $\arcsin(1) = \pi/2$) existiert die eindeutige Lösung von (AWP)

$$y(x) = 1 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

Im Fall $y_0 \in (-1, 1)$ existiert die eindeutige Lösung von (AWP)

$$y(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x^2}{2} + \arcsin y_0\right) & \text{für } x \in I\,, \\ 1 & \text{für } x \notin I\,. \end{cases}$$

Im Fall $y_0 = -1$ existiert keine eindeutige Lösung von (AWP). Beispielsweise sind

$$y_1(x) = -1 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

oder auch (wegen $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$)

$$y_2(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } x \in (-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi})\,, \\ 1 & \text{für } x \notin (-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi}) \end{cases}$$

Lösungen von (AWP).

Aufgabe 66

a) Da es sich bei der gegebenen Differentialgleichung $y' = -\frac{4x}{1+x^2}y + \frac{x}{1+x^2}$ um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung handelt, ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar. Zur Bestimmung der Lösung können die Lösungsformel aus 12.3 der Vorlesung verwenden. Wir erhalten

$$A(x) = \int_1^x \frac{-4t}{1+t^2}\,dt = -2\log(1+t^2)\big|_1^x = -2\log\left(\frac{1+x^2}{1+1^2}\right) = \log\frac{4}{(1+x^2)^2},$$

und damit

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 \cdot e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_1^x e^{-A(s)} \frac{s}{1+s^2}\,ds \\ &= \frac{4}{(1+x^2)^2} + \frac{4}{(1+x^2)^2} \int_1^x \frac{1}{4} s(1+s^2)\,ds \\ &= \frac{4}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^2} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{13}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $y(x) \neq 0$ multiplizieren wir die gegebene Differentialgleichung mit $3y^2(x)$ und erhalten

$$3y^2(x)y'(x) = 1 + x + 3y^3(x) \;\Leftrightarrow\; (y^3(x))' = 1 + x + 3y^3(x).$$

Die Substitution $z(x) = y^3(x)$ führt dann auf die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = 1 + x + 3z(x). \tag{1}$$

Das zugehörige Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar. Um die Lösungen von (1) zu bestimmen, machen wir den Ansatz $z(x) = ce^{3x} + ax + b$ und erhalten

$$z'(x) = 3ce^{3x} + a = 1 + x + 3ce^{3x} + 3ax + 3b,$$

welches genau für $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{9}$ und beliebiges $c \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Also ist $z(x) = ce^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$ für $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung (1). Durch Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt sich weiter $z(0) = (y(0))^3 = 8 \;\Leftrightarrow\; c = \frac{76}{9}$. Somit ist

$$y(x) = \left(\frac{76}{9}e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)^{1/3}, \quad x \in \mathbb{R},$$

die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems (beachte dabei, dass $y(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 67

a) Es sei $\phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (AWP). Nach der Kettenregel folgt, dass mit $\phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ auch $\tilde{\phi} : -\tilde{I} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Da ϕ Lösung von (AWP) ist, gilt weiter $\phi(x) \in J$ für alle $x \in \tilde{I}$, $x_0 \in \tilde{I}$, $\phi(x_0) = y_0$ und $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ für alle $x \in \tilde{I}$. Hieraus folgt nach Definition von $\tilde{\phi}$, dass $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x) \in J$ für $x \in -\tilde{I}$, $-x_0 \in -\tilde{I}$ und $\tilde{\phi}(-x_0) = \phi(x_0) = y_0$ gilt, sowie

$$\tilde{\phi}'(x) = -\phi'(-x) = -f(-x, \phi(-x)) = -f(-x, \tilde{\phi}(x)) \qquad \text{für alle } x \in -\tilde{I}.$$

Somit ist gezeigt, dass $\tilde{\phi} : -\tilde{I} \to \mathbb{R}$ Lösung des Anfangswertproblems $y' = -f(-x, y),\ y(-x_0) = y_0$ ist.

b) Unmittelbar klar ist, dass ϕ die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt. Außerdem ist ϕ in $[a, x_0)$ und $(x_0, b]$ differenzierbar und erfüllt dort die Differentialgleichung. Zu zeigen bleibt also: ϕ ist differenzierbar in x_0 mit $\phi'(x_0) = f(x_0, \phi(x_0)) = f(x_0, y_0)$.
Da ϕ_2 Lösung von (AWP) auf $[x_0, b]$ ist, ist ϕ_2 in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\phi_2(x) - \phi_2(x_0)}{x - x_0} = \phi_2'(x_0) = f(x_0, \phi_2(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

Analog kann man für ϕ_1 schließen (da $\phi(x_0) = y_0 = \phi_1(x_0)$), dass

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\phi_1(x) - \phi_1(x_0)}{x - x_0} = \phi_1'(x_0) = f(x_0, \phi_1(x_0)) = f(x_0, y_0)$$

gilt. Nach Satz 10.12 folgt hieraus, dass ϕ in x_0 differenzierbar ist mit $\phi'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Aufgabe 68

a) Sei $f\colon [a, b] \to [0, \infty)$ stetig und es existiere ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) > 0$.

Sei $\varepsilon := \frac{1}{2} f(x_0)$. Nach Voraussetzung ist $\varepsilon > 0$ und aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für solche x gilt

$$f(x) = f(x_0) - (-f(x) + f(x_0)) \geq f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon\,.$$

Setzt man $\alpha := \max\{a, x_0 - \delta\}$ und $\beta := \min\{b, x_0 + \delta\}$, so gilt $a \leq \alpha < \beta \leq b$ und $f(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Zusammen mit der Abschätzung $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \\
&\geq \int_a^\alpha 0\,dx + \int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx + \int_\beta^b 0\,dx = (\beta - \alpha)\varepsilon > 0\,.
\end{aligned}$$

b) Es sei $f \in C([a, b])$ mit $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$.

Annahme: Es existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \neq 0$.

Betrachte die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := |f(x)|$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig mit $h(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $h(x_0) = |f(x_0)| > 0$. Nach Teil a) gilt

$$0 < \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$. Demnach ist die Annahme falsch und es gibt kein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \neq 0$, d.h. für alle $x \in [a, b]$ gilt $f(x) = 0$.