Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12
26.01.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 69

Berechnen Sie jeweils die Lösung des Anfangswertproblems.

a) $y'' + 2y' + 2y = \cos x, \quad y(0) = \frac{1}{5},\ y'(0) = \frac{7}{5}$

b) $y'' - y = xe^x, \quad y(0) = y'(0) = 0$

Aufgabe 70

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie in den Aufgabenteilen a), b) und c) gegebenenfalls den Wert des Integrals.

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\,(\log x)^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y\log y}{\sinh y - y}\,dy$

c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx \quad (s<0,\ t\in\mathbb{R})$

d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\log(1+t)\,dt$

Aufgabe 71

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\,dx$$

konvergiert, und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Hinweis: Drücken Sie $I_n(\lambda)$ mittels $I_n(1)$ aus und finden Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Rekursionsformel, wie man $I_{n+1}(1)$ berechnen kann, wenn $I_n(1)$ bekannt ist.

Aufgabe 72

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty n(n+3)e^{nx}$$

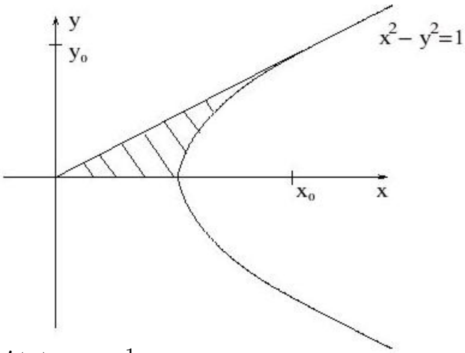
konvergiert. Bestimmen Sie für diese x den Wert der Reihe.

Hinweis: Setzen Sie $y := e^x$ und klammern eine geeignete Potenz von y aus. Integrieren Sie dann die verbleibende Potenzreihe.

— bitte wenden —

Aufgabe 73

Sei (x_0, y_0) der Schnittpunkt der skizzierten Geraden mit der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der schraffierten Fläche gleich $\frac{1}{2}\text{Arcosh}(x_0)$ ist.



Hinweis: Verwenden Sie $\text{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ für $x > 1$.

Aufgabe 74

a) Seien $0 \leq a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion mit $f(a) \geq 0$. Die (dann existierende) Umkehrfunktion von f sei $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Zeigen Sie mit Hilfe von Ober- und Untersummen

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = bf(b) - af(a)\,.$$

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Situation anhand einer Skizze.

b) Sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $s, t \geq 0$ gilt

$$st \leq \int_0^t f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy \qquad (\textit{Youngsche Ungleichung}).$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn $f(t) = s$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil a) samt Skizze.

c) Zeigen Sie: Sind $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt für alle $s, t \geq 0$

$$st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$$

mit Gleichheit genau für $s^p = t^q$.