Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 69

a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$ hat die konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda_{1/2} = -1 \pm i$. D.h. die homogene Gleichung besitzt die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen, machen wir den Ansatz $y_\mathrm{p}(x) = a\cos x + b\sin x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$y_\mathrm{p}' = -a\sin x + b\cos x, \qquad y_\mathrm{p}'' = -a\cos x - b\sin x.$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}'' + 2y_\mathrm{p}' + 2y_\mathrm{p} &= -a\cos x - b\sin x - 2a\sin x + 2b\cos x + 2a\cos x + 2b\sin x \\ &= (a+2b)\cos x + (b-2a)\sin x \overset{!}{=} \cos x. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{5}$ und $b = \frac{2}{5}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = \frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x + c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,. \tag{1}$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man $\frac{1}{5} \overset{!}{=} y(0) = \frac{1}{5} + c_1$, also $c_1 = 0$. Setzt man dies in (1) ein, so folgt $y'(x) = -\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x - c_2 e^{-x}\sin x + c_2 e^{-x}\cos x$ und hieraus wiederum $\frac{7}{5} \overset{!}{=} y'(0) = \frac{2}{5} + c_2$, also $c_2 = 1$. Das Anfangswertproblem hat somit die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x + e^{-x}\sin x.$$

b) Hier hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ die einfachen Nullstellen 1 und -1, d. h. die homogene Gleichung besitzt die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung xe^{1x} lautet und 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p mit Vielfachheit $\nu = 1$ ist, reicht es hier nicht, einen Ansatz der Form $(ax+b)e^x$ zu machen; vielmehr muss man $y_\mathrm{p}(x) = x^\nu(ax+b)e^x = (ax^2+bx)e^x$ betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}' &= (2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x = \big(ax^2 + (2a+b)x + b\big)e^x\,, \\ y_\mathrm{p}'' &= (2ax+2a+b)e^x + \big(ax^2+(2a+b)x+b\big)e^x = \big(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b\big)e^x\,, \end{aligned}$$

d. h. mit diesem Ansatz hat man

$$y_\mathrm{p}'' - y_\mathrm{p} = \big(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b - ax^2 - bx\big)e^x = (4ax + 2a + 2b)e^x \overset{!}{=} xe^x\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{4}$ und $b = -\frac{1}{4}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x^2 - x)e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Damit ergibt sich $y(0) = c_1 + c_2$ und $y'(x) = \frac{1}{4}(2x-1)e^x + \frac{1}{4}(x^2-x)e^x + c_1 e^x - c_2 e^{-x}$, also $y'(0) = -\frac{1}{4} + c_1 - c_2$. Beides soll $= 0$ sein, das bedeutet $c_1 = -c_2 = \frac{1}{8}$. Das Anfangswertproblem hat somit die Lösung

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x^2 - x)e^x + \tfrac{1}{8}e^x - \tfrac{1}{8}e^{-x} = \tfrac{1}{8}(2x^2 - 2x + 1)e^x - \tfrac{1}{8}e^{-x}\,.$$

Aufgabe 70

a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \log x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int_{\log 2}^{\log R} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\log 2}^{\log R} = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log R}.$$

Für $R \to \infty$ strebt dies gegen $(\log 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

b) Wir zeigen, dass dieses Integral „am linken Rand" divergent ist: Für jedes $y \in (0, e^{-1}]$ gilt $-\log y \geq 1$. Mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung von $\sinh y$ erkennt man

$$\sinh y - y = \big(y + \tfrac{1}{3!}y^3 + \tfrac{1}{5!}y^5 + \cdots\big) - y = \tfrac{1}{3!}y^3 + \tfrac{1}{5!}y^5 + \cdots = \tfrac{1}{3!}y^3 h(y)$$

mit $h(y) := (1 + \frac{3!}{5!}y^2 + \cdots)$. Für $y \to 0$ gilt $h(y) \to 1$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $h(y) \leq 3!$ für alle $y \in (0, \varepsilon]$. Für diese y ergibt sich $0 < \sinh y - y \leq y^3$. Zusammen erhält man

$$\frac{-y\log y}{\sinh y - y} \geq \frac{y}{\sinh y - y} \geq \frac{y}{y^3} = y^{-2} \geq 0 \qquad \text{für alle } y \in (0, \min\{\varepsilon, e^{-1}\}].$$

Mit dem Minorantenkriterium folgt die Divergenz von $\int_0^\varepsilon \frac{-y\log y}{\sinh y - y}\,dy$, weil das uneigentliche Integral $\int_0^\varepsilon y^{-2}\,dy$ divergent ist. Hiermit divergiert auch $\int_0^\varepsilon \frac{y\log y}{\sinh y - y}\,dy$.

c) Seien $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ fest. Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx.$$

Erneute partielle Integration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \frac{e^{sx}}{s^2}\,t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R \\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}\,t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}.\end{aligned}$$

(Man beachte $s < 0$.) Also ist das Integral $\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx$ konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2 + t^2}.$$

d) Aus der Ungleichung $1 + t \leq e^t$ folgt $\log(1+t) \leq t$ für alle $t \geq 0$. Also ist

$$\left|e^{-t}\log(1+t)\right| \leq te^{-t} \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Da das Integral $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$ (vgl. Aufgabe 71 mit $n = 1$ und $\lambda = 1$) existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 71

Wir zeigen zunächst, dass das uneigentliche Integral $I_0(1)$ konvergiert und dass sein Wert $= 1$ ist:

$$I_0(1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^R = \lim_{R\to\infty} -e^{-R} + e^{-0} = 1\,.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Partielle Integration mit $f(x) = x^n$ und $g'(x) = e^{-x}$ liefert

$$\begin{aligned} I_n(1) &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\left[x^n(-e^{-x})\right]_{x=0}^R - \int_0^R nx^{n-1}(-e^{-x})\,dx \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} -R^n e^{-R} + nI_{n-1}(1) = nI_{n-1}(1)\,. \end{aligned} \qquad (*)$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt per vollständiger Induktion, dass das Integral $I_n(1)$ konvergiert mit Wert $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$:
IA: $n = 0$. Zuvor haben wir gesehen, dass $I_0(1)$ konvergiert und dass $I_0(1) = 1 = 0!$ gilt.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Das Integral $I_n(1)$ konvergiere und es gelte $I_n(1) = n!$ (IV). Damit ergibt sich

$$I_{n+1}(1) \overset{(*)}{=} (n+1)I_n(1) \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)n! = (n+1)!\,.$$

Für jedes $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ führt die Substitution $y = \lambda x, dy = \lambda\,dx$ auf

$$I_n(\lambda) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^n e^{-y}\,\frac{dy}{\lambda} = \lambda^{-(n+1)} \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} y^n e^{-y}\,dy = \lambda^{-(n+1)} I_n(1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}\,.$$

Aufgabe 72

Wir nutzen das Wurzelkriterium: Wegen

$$\sqrt[n]{|n(n+3)e^{nx}|} = \sqrt[n]{n(n+3)}\,e^x \xrightarrow{n\to\infty} e^x$$

gilt: Für $e^x < 1$ konvergiert die Reihe, für $e^x > 1$ divergiert sie. Das bedeutet: Für $x < 0$ liegt Konvergenz, für $x > 0$ Divergenz vor. Für $x = 0$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty n(n+3) \cdot 1$, da $n(n+3) \not\to 0$. Insgesamt: Genau für $x < 0$ konvergiert die Reihe.
Nun sei $x < 0$. Wir setzen $y := e^x$ und wollen

$$f(y) := \sum_{n=1}^\infty n(n+3)y^n = y \sum_{n=1}^\infty n(n+3)y^{n-1}$$

berechnen. Nach Anwendung 13.2 besitzt $g(y) := f(y)/y$ die Stammfunktion

$$G(y) = \sum_{n=1}^\infty (n+3)y^n = \frac{1}{y^2} \sum_{n=1}^\infty (n+3)y^{n+2}\,.$$

Nun hat wiederum $h(y) := y^2 G(y)$ die Stammfunktion

$$H(y) = \sum_{n=1}^\infty y^{n+3} \overset{k:=n-1}{=} y^4 \sum_{k=0}^\infty y^k \overset{|y|<1}{=} \frac{y^4}{1-y}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$h(y) = H'(y) = \frac{4y^3(1-y) + y^4}{(1-y)^2} = \frac{4y^3 - 3y^4}{(1-y)^2}, \qquad G(y) = \frac{h(y)}{y^2} = \frac{4y - 3y^2}{(1-y)^2}\,.$$

Also ist

$$g(y) = G'(y) = \frac{(4-6y)(1-y)^2 + (4y-3y^2)2(1-y)}{(1-y)^4} = \frac{4-2y}{(1-y)^3}\,.$$

Schließlich ergibt sich dann

$$\sum_{n=1}^\infty n(n+3)e^{nx} = f(y) = yg(y) = \frac{4y - 2y^2}{(1-y)^3} = \frac{4e^x - 2e^{2x}}{(1-e^x)^3}\,.$$

Aufgabe 73

Sei (x_0, y_0) der Schnittpunkt im ersten Quadranten der Geraden mit der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.
Für $x, y \geq 0$ gilt $x^2 - y^2 = 1$ genau dann, wenn $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ist.
Das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(x_0, 0)$ und (x_0, y_0) hat den Flächeninhalt

$$F_D := \frac{1}{2}\, x_0\, y_0 = \frac{1}{2}\, x_0 \sqrt{x_0^2 - 1}\,.$$

Die gesuchte Fläche erhalten wir, indem wir hiervon die Fläche unter der Hyperbel

$$F_H := \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

subtrahieren. Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned}\int_1^{x_0} 1 \cdot \sqrt{x^2 - 1}\, dx &= \Big(x\sqrt{x^2 - 1}\Big)\Big|_{x=1}^{x_0} - \int_1^{x_0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx \\ &= x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \int_1^{x_0} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx\,.\end{aligned}$$

Kürzen wir den Integranden im zweiten Summanden und addieren auf beiden Seiten $\int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$, so bekommen wir

$$2\int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\, dx = x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx\,.$$

Wegen $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ für $x > 1$ und $\operatorname{Arcosh}(1) = 0$ folgt

$$\int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2}\, x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Arcosh}(x)\Big)\Big|_{x=1}^{x_0} = \frac{1}{2}\, x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\,.$$

Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$F_D - F_H = \frac{1}{2}\, x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \left(\frac{1}{2}\, x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\,.$$

Aufgabe 74

a) Seien $0 \leq a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion mit $f(a) \geq 0$. Die (dann existierende) Umkehrfunktion von f sei $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a,b]$.

Da die Funktionen f und f^{-1} stetig sind, gilt $f \in R[a,b]$ und $f^{-1} \in R[f(a), f(b)]$.

Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Da f streng monoton wachsend ist, ist $\tilde{Z} := f(Z) = \{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ eine Zerlegung von $[f(a), f(b)]$.

Unter Berücksichtigung der Monotonie von f und f^{-1} erhalten wir

$$\begin{aligned}S_f(Z) + s_{f^{-1}}(\tilde{Z}) &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\sup f([x_{j-1}, x_j])}_{=f(x_j)}(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^n \underbrace{\inf f^{-1}([f(x_{j-1}), f(x_j)])}_{=f^{-1}(f(x_{j-1}))=x_{j-1}}(f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^n \Big[f(x_j)x_j - f(x_j)x_{j-1} + x_{j-1}f(x_j) - x_{j-1}f(x_{j-1})\Big] \\ &= \sum_{j=1}^n \Big[f(x_j)x_j - x_{j-1}f(x_{j-1})\Big] = f(x_n)x_n - x_0 f(x_0) = f(b)\, b - a\, f(a)\,.\end{aligned}$$

Wegen $s_{f^{-1}} = \sup\{s_{f^{-1}}(Z')\colon\ Z' \text{ ist Zerlegung von } [f(a), f(b)]\} \geq s_{f^{-1}}(\tilde{Z})$ ergibt sich

$$S_f(Z) + s_{f^{-1}} \geq f(b)\, b - a\, f(a) \qquad \text{bzw.} \qquad S_f(Z) \geq b\, f(b) - a\, f(a) - s_{f^{-1}}\,.$$

Da Z eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$ war, folgt

$$S_f = \inf\{\underbrace{S_f(Z)}_{\geq b\,f(b) - a\,f(a) - s_{f^{-1}}} : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} \geq b\,f(b) - a\,f(a) - s_{f^{-1}}$$

bzw.

$$S_f + s_{f^{-1}} \geq b\,f(b) - a\,f(a)\,. \tag{2}$$

Mit einer analogen Rechnung zeigen wir $s_f + S_{f^{-1}} \leq b\,f(b) - a\,f(a)$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} s_f(Z) + S_{f^{-1}}(\tilde{Z}) &= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\inf f([x_{j-1}, x_j])}_{=f(x_{j-1})}(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sup f^{-1}([f(x_{j-1}), f(x_j)])}_{=f^{-1}(f(x_j))=x_j}(f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big[f(x_{j-1})x_j - f(x_{j-1})x_{j-1} + x_j f(x_j) - x_j f(x_{j-1}) \Big] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big[f(x_j)x_j - x_{j-1}f(x_{j-1}) \Big] = f(x_n)x_n - x_0 f(x_0) = f(b)\,b - a\,f(a)\,. \end{aligned}$$

Wegen $S_{f^{-1}} = \inf\{S_{f^{-1}}(Z') : \; Z' \text{ ist Zerlegung von } [f(a), f(b)]\} \leq S_{f^{-1}}(\tilde{Z})$ ergibt sich

$$s_f(Z) + S_{f^{-1}} \leq f(b)\,b - a\,f(a)\,.$$

Da Z eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$ war, folgt wie zuvor

$$s_f + S_{f^{-1}} \leq b\,f(b) - a\,f(a)\,. \tag{3}$$

Insgesamt haben wir

$$b\,f(b) - a\,f(a) \overset{(2)}{\leq} S_f + s_{f^{-1}} \overset{f \in R[a,b],\, f^{-1} \in R[f(a), f(b)]}{=} s_f + S_{f^{-1}} \overset{(3)}{\leq} b\,f(b) - a\,f(a)\,,$$

also überall "=". Folglich ist

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = S_f + s_{f^{-1}} = b\,f(b) - a\,f(a)\,.$$

b) Sei $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig und streng monoton wachsend mit $f(0) = 0$ und $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. Weiter seien $s, t \geq 0$. Wir wenden das Resultat aus Aufgabenteil a) an auf f, $a = 0$ und $b = f^{-1}(s)$. [Unter den gegebenen Voraussetzungen an f folgt mit dem Zwischenwertsatz $f([0, \infty)) = [0, \infty)$. Daher existiert $f^{-1}(s)$.] Wir erhalten

$$\int_0^{f^{-1}(s)} f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy = s\,f^{-1}(s)\,.$$

Addieren wir auf beiden Seiten $\int_{f^{-1}(s)}^t f(x)\,dx$ und benutzen Satz 11.7, so erhalten wir

$$\int_0^t f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy = f^{-1}(s)\,s + \int_{f^{-1}(s)}^t f(x)\,dx\,.$$

Mit

$$f^{-1}(s)\,s = st - \big(t - f^{-1}(s)\big)s = st - \int_{f^{-1}(s)}^t s\,dx$$

ergibt sich

$$\int_0^t f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy = st - \int_{f^{-1}(s)}^t s\,dx + \int_{f^{-1}(s)}^t f(x)\,dx = st + \int_{f^{-1}(s)}^t (f(x) - s)\,dx\,.$$

Hieraus folgt die behauptete Aussage, sobald wir

$$\int_{f^{-1}(s)}^{t} (f(x) - s)\, dx \begin{cases} = 0 & \text{für } s = f(t), \\ > 0 & \text{für } s \neq f(t) \end{cases} \tag{$*$}$$

gezeigt haben.

1. Fall: $s = f(t)$. Dann ist $f^{-1}(s) = t$ und damit $\int_{f^{-1}(s)}^{t}(f(x) - s)\, dx = \int_{t}^{t}(f(x) - s)\, dx = 0$.

2. Fall: $s < f(t)$ bzw. $f^{-1}(s) < t$. Für alle $x \in [f^{-1}(s), t]$ gilt $s = f(f^{-1}(s)) \leq f(x)$ bzw. $f(x) - s \geq 0$. Wegen $f(t) - s > 0$ und der Stetigkeit von $x \mapsto f(x) - s$ ergibt sich nach Aufgabe 68 a) vom 12. Übungsblatt

$$\int_{f^{-1}(s)}^{t} (f(x) - s)\, dx > 0\,.$$

3. Fall: $s > f(t)$ bzw. $f^{-1}(s) > t$. Für alle $x \in [t, f^{-1}(s)]$ gilt $s = f(f^{-1}(s)) \geq f(x)$ bzw. $s - f(x) \geq 0$. Wegen $s - f(t) > 0$ und der Stetigkeit von $x \mapsto s - f(x)$ ergibt sich nach Aufgabe 68 a) vom 12. Übungsblatt

$$\int_{t}^{f^{-1}(s)} (s - f(x))\, dx > 0\,, \qquad \text{also} \qquad \int_{f^{-1}(s)}^{t} (f(x) - s)\, dx > 0\,.$$

Damit ist $(*)$ bewiesen.

c) Es seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir betrachten $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^{q-1}$. Die Umkehrfunktion von f ist dann gegeben durch $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $y \mapsto y^{p-1}$, da $\frac{1}{p} = \frac{q-1}{q}$ und somit $p - 1 = \frac{1}{q-1}$. Aus Aufgabenteil b) folgt für alle $s, t \geq 0$

$$st \leq \int_0^t x^{q-1}\, dx + \int_0^s y^{p-1}\, dy = \frac{t^q}{q} + \frac{s^p}{p},$$

mit Gleichheit genau für $t^{q-1} = f(t) = s$, d.h. genau für $t^q = s^p$ (da $p(q-1) = q$).