Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12
02.02.2012

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

## 14. Übungsblatt

### Aufgabe 75

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ ?

**a)** $\left\{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\right\}$

**b)** $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f(0) = 0\right\}$

**c)** $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\right\}$

**d)** $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ ist surjektiv}\right\}$

### Aufgabe 76

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

**a)** Jede Menge $M$ von Vektoren aus $V$ mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

**b)** Ist $M := \{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus $M$ als Linearkombination der anderen Vektoren aus $M$ darstellen.

**c)** Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \dots, v_n$, dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

**d)** Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.

**e)** Sind $v_1, v_2$ linear unabhängig und sind $v_1, v_3$ linear unabhängig, so sind auch $v_2, v_3$ linear unabhängig.

### Aufgabe 77

**a)** Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie:

- **i)** Die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ sind linear abhängig.
- **ii)** Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v}_2 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_3\vec{v}_3$.

**b)** Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

— bitte wenden —

**Aufgabe 78**

Bestimmen Sie (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern) die Zeilennormalform der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 79**

**a)** Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := 2$, $g(x) := x-1$ und $h(x) := x^2+3x$ definierten Funktionen $f, g$ und $h$ aus $C[0,1]$ linear unabhängig sind.

**b)** Sei $P_2[0,1] := \{p\colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid p \text{ ist Polynom vom Grad } \leq 2\}$. Begründen Sie, dass $f, g, h$ eine Basis von $P_2[0,1]$ bilden.

**c)** Wie lauten die Koordinaten des durch $p(x) = 8x^2 + 2x + 2$, $x \in [0,1]$, gegebenen Polynoms $p$ bzgl. der Basis $f, g, h$?

**Hinweis:**
Die **Klausur zu HM I** findet am Montag, den 12.03.2012, 08:00-10:00 Uhr statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich, welche über das KIT-Studierendenportal vorgenommen werden kann. **Anmeldeschluss ist Freitag, der 10.02.2012.**