Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 75

a) Um zu zeigen, dass $A := \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist, verwenden wir den Satz 14.4:

(i) $A \neq \emptyset$ wegen $(0)_{j\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\dots) \in A$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x_j), (y_j) \in A$, d.h. die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$ und $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|$ konvergieren. Nach Satz 7.2 (5) konvergieren dann auch die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha\, |x_j|$ und $\sum_{j=1}^{\infty}(|x_j| + |y_j|)$. Wegen $|\alpha\, |x_j|| = |\alpha x_j|$ und $|x_j + y_j| \le |x_j| + |y_j|$ für alle $j \in \mathbb{N}$ konvergieren nach dem Majorantenkriterium 7.4 (1) auch die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j|$ und $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|$. Folglich sind auch $\alpha(x_j)$, $(x_j) + (y_j) \in A$.

b) Wie zuvor benutzen wir den Satz 14.4, um zu begründen, dass $B := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f(0) = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ ist:

(i) $B \neq \emptyset$, weil die Nullabbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ in B liegt.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in B$. Dann gilt

1) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0\,, \qquad$ also $f + g \in B\,;$

2) $(\alpha f)(0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot 0 = 0\,, \qquad$ also $\alpha f \in B\,.$

c) $C := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, weil z.B. die Funktionen

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad g : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x$$

in C liegen, ihre Summe wegen $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1$, $x \in [-1,1]$, jedoch nicht.

d) $D := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ ist surjektiv}\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, weil z.B. die Nullfunktion $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ nicht in D liegt.

(Wäre D ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, so müsste mit $g \in D$ auch die Nullfunktion $0 \cdot g = 0$ in D liegen!)

Aufgabe 76

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$.

a) Ist $M \subset V$ mit $0 \in M$, so gilt $\operatorname{lin}(M) = \operatorname{lin}(M \setminus \{0\})$. Daher ist M linear abhängig.

b) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise ist $M = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2 = V$ linear abhängig, jedoch kann $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ nicht als Linearkombination des Nullvektors $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ dargestellt werden, d.h. es existiert kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. [Weiteres Gegenbeispiel siehe Aufgabe 77 a)]

c) Es existiere ein Vektor $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, v_2, \dots, v_n$ (d.h. es gebe eindeutige $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$). Wir nehmen an, dass der Nullvektor neben der Darstellung als triviale Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ noch eine andere Darstellung als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ besitzt. Dann besitzt auch $v = v + 0$ zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich lässt sich der Nullvektor nur als triviale Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

d) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Wählt man $\vec{v} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, so sind die Vektoren $\vec{v}_1 + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 + \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig, denn es gilt $0 \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}) + 1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $V = \mathbb{C}^2$. Dort sind $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Außerdem sind $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Die Vektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ sind jedoch nicht linear unabhängig, denn es gilt $\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 77

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

i) Offenbar ist $\vec{v}_1 = -2\vec{v}_3$. Daher gilt $\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 = 0$, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linear abhängig.

Im allgemeinen erkennt man nicht sofort, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Um die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, können wir $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ als Zeilen in eine Matrix schreiben und diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[vertausche erste und zweite Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[multipliziere die dritte Zeile mit 2]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Summe der zweiten und dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Zeilen der letzten Matrix linear abhängig sind, sind es $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ auch.

ii) Wäre $\vec{v}_2 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_3\vec{v}_3$ für $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so müsste für die erste Komponente gelten: $3 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$. Dies ist nicht möglich. Deshalb gibt es keine $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v}_2 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_3\vec{v}_3$.

b) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = 0$, also mit

$$\left\{\begin{array}{lllll} \alpha_1 & & +\,\alpha_3 a & = & 0 \\ & \alpha_2 & +\,\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & -\,\alpha_2 & +\,\alpha_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_1 & = & -a\alpha_3 \\ \alpha_2 & = & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & = & -2\alpha_3 \end{array}\right.$$

Nur für $a = 2$ gibt es eine Lösung, die sich von $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ unterscheidet (z.B. $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, dann gilt $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = 0$).

Also sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ nur für $a = 2$ linear abhängig.

Aufgabe 78

Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{2}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{3}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{7}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Zeilennormalform von A gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3.
Nun zur Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(j=2,3,4)]{Z_j \to Z_j - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3]{Z_4 \to Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} =: \widetilde{B}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Fall steht die Zeilennormalform von B bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Fall Rang 3.
Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\beta-4)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und lesen ab: In diesem Fall hat B Rang 4.
Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := (\beta - 4)/(\alpha - 10)$ und erhalten

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\alpha-10)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 4Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 6Z_4,\ Z_2 \to Z_2 + Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 - 6\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 + 4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

Die Matrix B besitzt somit auch in diesem Fall Rang 4.

Aufgabe 79

a) Die Funktionen f, g, h sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$ (wobei 0 hier für die Nullfunktion $[0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ steht) stets $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt, also wenn aus $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ stets $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt.

Seien also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot 2 + \beta(x-1) + \gamma(x^2 + 3x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$, d.h. $(2\alpha - \beta) + (\beta + 3\gamma)x + \gamma x^2 = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Sind $p_k \colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ für $k = 0, 1, 2$ definiert, so lässt sich dies schreiben als $(2\alpha - \beta)p_0 + (\beta + 3\gamma)p_1 + \gamma p_2 = 0$. Da die Monome p_0, p_1, p_2 in $C[0,1]$ linear unabhängig sind, kann man den Nullvektor nur als triviale Linearkombination von p_0, p_1, p_2 schreiben, so dass $2\alpha - \beta = \beta + 3\gamma = \gamma = 0$ folgt. Hieraus ergibt sich sofort $\gamma = 0$ und daher $\beta + 3 \cdot 0 = 0$, also $\beta = 0$, was schließlich auf $\alpha = 0$ führt. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von f, g, h gezeigt.

b) f, g, h bilden eine Basis von $P_2[0,1] = \text{lin}(p_0, p_1, p_2)$, weil $\dim P_2[0,1] = 3$ ist und die drei Vektoren $f, g, h \in P_2[0,1]$ linear unabhängig sind.

c) Für jedes $x \in [0,1]$ gilt $p(x) = 8x^2 + 2x + 2 = 8(x^2 + 3x) - 22x + 2 = 8h(x) - 22(x-1) - 20 = 8h(x) - 22g(x) - 10f(x)$. Daher ist $p = 8h - 22g - 10f$, so dass die Koordinaten von p bzgl. der Basis f, g, h durch $-10, -22, 8$ gegeben sind.

Bemerkung: Die Reihenfolge der Basiselemente ist bei der Angabe der Koordinaten von entscheidender Bedeutung. So lauten beispielsweise die Koordinaten von p bzgl. der Basis g, h, f folgendermaßen: $-22, 8, -10$.