Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12
07.02.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

15. Übungsblatt

Aufgabe 80

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob das Gleichungssystem lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 81

Im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^4$ seien der Vektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5i - 1 \\ 1 - i \\ c^2 \end{pmatrix}$ und der Untervektorraum

$$U = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 - i \\ 1 + i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ -c - i \\ c^2 + 2ci \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i - 1 + c \\ -c - i \\ 2i \end{pmatrix}\}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{C}$, für die $\vec{y} \in U$ gilt.

Aufgabe 82

a) Gegeben sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
Ist ϕ linear? Bestimmen Sie Kern ϕ und Bild ϕ.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechnen Sie eine Basis von Kern A und von Bild A.

Aufgabe 83

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} k x_k$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern ϕ und eine Basis von Bild ϕ.

c) Für welche n ist ϕ injektiv?

— bitte wenden —

Aufgabe 84

a) Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ definiere $P_{\vec{a}}(\vec{x}) := \Big(\sum_{j=1}^{3} x_j a_j\Big)\vec{a}$.

- **i)** Begründen Sie, dass die Abbildung $P_{\vec{a}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear ist.
- **ii)** Geben Sie die Darstellungsmatrix von $P_{\vec{a}}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.

b) Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\phi(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3\,, \qquad \phi(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1\,, \qquad \phi(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3\,.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 85

Im $\mathbb{R}^{4\times4}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times3}$ sind die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A und B regulär sind. Ist C regulär? Bestimmen Sie A^{-1}, B^{-1} und $(AB)^{-1}$.

Aufgabe 86

Wir betrachten den Vektorraum $\ell^1 := \ell^1(\mathbb{N}) := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}$ (vgl. Aufgabe 75). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\|\,.\,\|_1 : \ell^1 \to [0,\infty),\; x \mapsto \|x\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|\,,$$

eine Norm auf ℓ^1 definiert.

Hinweis:
Die **Klausur zu HM I** findet am Montag, den 12.03.2012, 08:00-10:00 Uhr statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich, welche über das KIT-Studierendenportal vorgenommen werden kann. **Anmeldeschluss ist Freitag, der 10.02.2012.**