Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 80

Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|\vec{y})$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \alpha Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right) =: (*)$$

1. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Dann setzen wir zur Abkürzung $\gamma := (2-\alpha)/(\beta-\alpha^2)$ und erhalten

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (\beta-\alpha^2)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - \alpha Z_3]{Z_1 \to Z_1 - (2+\alpha) Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-(2+\alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1-\alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Man sieht: In diesem Fall ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ eindeutig lösbar; die Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ ist gegeben durch $x_1 = 2 - (2+\alpha)\gamma$, $x_2 = 1 - \alpha\gamma$ und $x_3 = \gamma$.

2. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha \neq 2$. Dann ergibt sich

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (2-\alpha)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist größer als der von A. Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ in diesem Fall keine Lösung.

3. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha = 2$. Dann steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Rang der erweiterten Matrix und der Rang von A stimmen überein, das Gleichungssystem ist also lösbar. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $A\vec{x} = \vec{y}$ ist

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = 0$ erhält man, indem man $x_3 = \lambda$ setzt [oder den (-1)-Ergänzungstrick verwendet]:

$$\vec{x}_h = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{y}$ ist folglich

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Aufgabe 81

Definiere

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\i\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix}0\\-1-i\\1+i\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix}0\\-i\\-c-i\\c^2+2ci\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 := \begin{pmatrix}i\\i-1+c\\-c-i\\2i\end{pmatrix}.$$

Gesucht sind alle $c \in \mathbb{C}$, für welche das lineare Gleichungssystem $\sum_{j=1}^4 x_j\vec{v}_j = \vec{y}$ eine Lösung $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ hat. Wir wenden Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ i & -1-i & -i & i-1+c & 5i-1 \\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i \\ 2 & 0 & c^2+2ci & 2i & c^2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - iZ_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i \\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i \\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + cZ_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2+3ci-2 \end{array}\right)$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist unlösbar für $0 \neq c^2 + 3ci - 2 = (c+i)(c+2i)$, also für $c \in \mathbb{C} \setminus \{-2i, -i\}$. Wegen der dritten Zeile ist die Lösungsmenge auch für $c = -2i$ leer. Nur im Fall $c = -i$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar. Fazit: Genau für $c = -i$ gilt $\vec{y} \in U$.

Aufgabe 82

a) Wegen $\phi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ mit $A := \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist ϕ nach Beispiel (1) in 14.17 linear. Es gilt

$$\text{Kern } \phi = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \phi(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, A\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}.$$

Letzteres liest man unter Verwendung des (-1)-Ergänzungstricks der Zeilennormalform $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ von A ab. Gemäß Definition ist

$$\text{Bild } \phi = \{\phi(\vec{x}) \,:\, \vec{x} \in \mathbb{R}^2\} = \{A\vec{x} \,:\, \vec{x} \in \mathbb{R}^2\} = \text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\},$$

weil Bild A der lineare Aufspann der Spalten von A ist.

b) Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$A = \begin{pmatrix}-3&0&2\\1&1&0\\-2&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -\frac{1}{3}Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 + \frac{1}{3}Z_1 \\ Z_3 \to -\frac{1}{2}Z_3 + \frac{1}{3}Z_1}} \begin{pmatrix}1&0&-2/3\\0&1&2/3\\0&-1/2&-1/3\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + \frac{1}{2}Z_2} \begin{pmatrix}1&0&-2/3\\0&1&2/3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab:

$$\text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\-1\end{pmatrix}\} = \text{lin}\{\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\}.$$

Folglich ist $\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von Kern A und es gilt dim Kern $A = 1$. Die Dimensionsformel liefert dim Bild $A = 3 -$ dim Kern $A = 3 - 1 = 2$. Da die beiden Vektoren $A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$ Bild A linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Bild A, also

$$\text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Aufgabe 83

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} kx_k$ eine Abbildung.

a) Aufgrund von

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

ist $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach Beispiel (1) in 14.17 linear.

Alternativ kann man die Linearität von ϕ auch wie folgt begründen:

Für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\phi(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + y_n \end{pmatrix}) = \sum_{k=1}^{n} k(\alpha x_k + y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} kx_k + \sum_{k=1}^{n} ky_k = \alpha\phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})\,.$$

b) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 1 \cdot a = a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt Bild $\phi = \mathbb{R}$, also ist $\{1\}$ eine Basis von Bild $A =$ Bild ϕ. Insbesondere ist dim Bild $A = 1$.

Nun überlegen wir uns, wie viele Basisvektoren Kern $\phi =$ Kern A aufspannen. Die Dimensionsformel liefert $n =$ dim Bild $A +$ dim Kern A, folglich ist dim Kern $A = n - 1$.

Zur Bestimmung von Kern $A =$ Kern ϕ verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jeder der $n-1$ Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist in Kern ϕ enthalten. Da die angegebenen $n-1$ Vektoren linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Kern ϕ:

$$\text{Kern } \phi = \text{lin}\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

c) Wegen ϕ injektiv $\iff$ Kern $\phi = \{0\}$ $\iff$ dim Kern $\phi = 0$ ist ϕ genau für $n = 1$ injektiv.

Aufgabe 84

a) Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ definiere $P_{\vec{a}}(\vec{x}) := \left(\sum_{j=1}^{3} x_j a_j \right) \vec{a}$.

i) Die Abbildung $P_{\vec{a}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist linear, denn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$P_{\vec{a}}(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \left(\sum_{j=1}^{3} (\alpha x_j + y_j) a_j \right) \vec{a} = \left(\alpha \sum_{j=1}^{3} x_j a_j + \sum_{j=1}^{3} y_j a_j \right) \vec{a} = \alpha P_{\vec{a}}(\vec{x}) + P_{\vec{a}}(\vec{y}) \,.$$

ii) Um die Darstellungsmatrix von $P_{\vec{a}}$ bezüglich der Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des $\mathbb{R}^3$ anzugeben, berechnen wir das Bild $P_{\vec{a}}(\vec{e}_k)$ des Basisvektors $\vec{e}_k$ (für $k \in \{1,2,3\}$) und stellen dieses als Linearkombination von $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ (den Basisvektoren im Zielraum) dar. Wegen $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ ergibt sich für jedes $k \in \{1,2,3\}$

$$P_{\vec{a}}(\vec{e}_k) = \left(\sum_{j=1}^{3} \delta_{jk} a_j \right) \vec{a} = a_k \vec{a} = (a_k a_1)\vec{e}_1 + (a_k a_2)\vec{e}_2 + (a_k a_3)\vec{e}_3 \,.$$

Damit lautet die k-te Spalte der gesuchten Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} a_k a_1 \\ a_k a_2 \\ a_k a_3 \end{pmatrix}$ für $k \in \{1,2,3\}$.

Also ist die Darstellungsmatrix von $P_{\vec{a}}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ gleich

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_2 a_1 & a_3 a_1 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_3 a_2 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

b) Aufgrund der Linearität von ϕ gilt

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{e}_1) &= \phi(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) - \phi(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = (\vec{e}_2 - \vec{e}_3) - \vec{e}_1 = (-1)\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + (-1)\vec{e}_3 \,, \\
\phi(\vec{e}_2) &= \phi(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) - \phi(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3) = (-1)\vec{e}_1 + (-3)\vec{e}_2 + (-5)\vec{e}_3 \,, \\
\phi(\vec{e}_3) &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Somit lautet die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wenn nicht vorgegeben ist, bezüglich welcher Basen man die Darstellungsmatrix angeben soll, so kann man die Aufgabe sehr einfach lösen, indem man die Basen besonders geschickt wählt: Nimmt man "vorne" etwa die Basis $\vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ und "hinten" die Basis $2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ (Man sieht leicht, dass es sich dabei tatsächlich um Basen des $\mathbb{R}^3$ handelt), dann bildet ϕ den j-ten Basisvektor der "vorderen" Basis auf den j-ten Basisvektor der "hinteren" Basis ab, weshalb die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix I_3 ist. Beachte: ϕ ist nicht die Identitätsabbildung!

Aufgabe 85

Mit Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 5Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_1]{Z_3 \to Z_3 + 5Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 3Z_3]{Z_4 \to Z_4 - 6Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -14 & -15 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -30 & -30 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + 2Z_1]{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{permutieren}]{\text{Zeilen}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass A regulär ist, und haben zugleich $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet.

Für die Matrix B ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - Z_2]{Z_4 \to Z_4 - 3Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist B regulär mit $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

hat die Matrix C den Rang 2, so dass C nicht regulär ist.
Da A und B regulär sind, gilt:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & 49 & 10 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -38 & -45 & -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 86

In Aufgabe 75 wurde gezeigt, dass $\ell^1 = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.
Wir zeigen, dass die Abbildung $\|\,.\,\|_1 : \ell^1 \to [0,\infty),\ x \mapsto \|x\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$, die Normaxiome (N1)-(N3) aus Satz 14.21 erfüllt. Es seien $x, y \in \ell^1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
(N1): Aus $\|x\|_1 = 0$ folgt $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = 0$. Da $|x_j| \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ ist, folgt hieraus $x_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Somit ist $x = (x_j) = 0$.
(N2): Es gilt nach Satz 7.2 (5) $\|\alpha x\|_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j| = |\alpha| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = |\alpha|\, \|x\|_1$.
(N3): Wiederum nach Satz 7.2 (5) ist

$$\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} (|x_j| + |y_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_1| + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1 .$$

Folglich definiert $\|\,.\,\|_1$ eine Norm auf ℓ^1.