Ergänzung zum HM Tutorium

Patrik Hlobil Niko Kainaris

Dieses Dokument erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit. Es stellt keine Vorlesungszusammenfassung dar, sondern soll euch lediglich bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben helfen

Lineare Algebra

Beschäftigen wir uns zunächst mit einigen grundlegenden Konstrukten der Linearen Algebra: Gruppen, Körper, Algebren und Vektorräume. Diese bestehen jeweils aus einer Menge M und einer Reihe von Abbildungen, die festlegen wie man Elemente aus M miteinander kombiniert oder Elemente aus M mit Zahlen multipliziert.

1 Gruppe

Eine Menge M mit einer Abbildung „$\cdot$ “, die zwei Elemente $a, b \in M$ wieder auf ein Element $c = a \cdot b \in M$ abbildet, heißt **Gruppe**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

Sei M eine Menge, $M \neq \emptyset$ und

$$\begin{aligned} \cdot : M \times M &\to M \\ (a, b) &\to a \cdot b \end{aligned}$$

eine Abbildung.

Das Dupel $(M, \cdot)$ heißt Gruppe $:\Leftrightarrow$

1. Die Verknüpfung ist assoziativ, d.h. es gilt
   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2. Es existiert ein neutrales Element $e \in M$ mit
   $e \cdot a = a \cdot e = e$ für alle $a \in M$

3. Zu jedem $a \in M$ gibt es ein inverses Element $a^{-1} \in M$, so dass
   $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Ist die Verknüpfung zusätzlich noch kommutativ $a \cdot b = b \cdot a$, so nennt man die Gruppe **abelsch**

Beispiele

(a) $\mathbb{Z}$ mit der Addition „+ “

(b) $\mathbb{R}$ mit der Addition „+ “und $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$ mit der Multiplikation „$\cdot$ “

2 Körper

Sei M eine Menge mit mindestens zwei Elementen und seien

$$\begin{aligned} + : M \times M &\to M \\ (a, b) &\to a + b \\ \cdot : M \times M &\to M \\ (a, b) &\to a \cdot b \end{aligned}$$

Abbildungen.
Das Tripel $(M, +, \cdot)$ heißt **kommutativer Körper** $:\Leftrightarrow$

1. $(M, +)$ ist kommutative Gruppe
   (das neutrale Element bezeichnet man mit 0)

2. $(M \backslash \{0\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe
   (neutrales Element 1)

3. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + a \cdot b$ (Distributivgesetz)

Alle Zahlenmengen mit den bekannten Regeln für Addition und Multiplikation stellen z.B. Körper dar.

3 Vektorraum (VR)

Wir wollen nun allgemein das Konzept eines Vektorraums definieren.
Sei $\mathbb{K}$ ein kommutativer Körper, $(\alpha, \beta \in K)$ und V eine nichtleere Menge, $(\vec{a}, \vec{b} \in V)$.
Seien folgende Abbildungen definiert

$$
\begin{aligned}
+ : V \times V \to V \quad & \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \to \vec{a} + \vec{b} \\
\cdot : \mathbb{K} \times V \to V \quad & (\alpha, \vec{a}) \to \alpha\vec{a}
\end{aligned}
$$

d.h. wir definieren wie man Elemente aus V miteinander addiert und wie man Elementen aus V mit Elementen aus $\mathbb{K}$ multipliziert.
Das Quadrupel $(V, +, K, \cdot)$ heißt **Vektorraum über** $\mathbb{K}$, falls gilt:

I. $(V, +)$ ist kommutative Gruppe

II. i) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
   ii) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
   iii) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
   iv) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

Bemerkung:

- Bei $\mathbb{K}$ handelt es sich meist um die bekannten Skalarenkörper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
- Elemente eines Vektorraums nennt man **Vektoren**. Speziell heißt das neutrale Element $\vec{0}$ **Nullvektor**. Die Elemente aus $\mathbb{K}$ nennt man **Skalare**.

3.1 Untervektorraum

Eine Menge U heißt Unterraum eines Vektorraums V $(U \subseteq V)$, wenn

(U1) das Nullelement in U liegt, U also auf jeden Fall nicht leer ist: $0 \in U$

(U2) mit $\vec{u}, \vec{w} \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ auch $\vec{u} + \alpha\vec{w} \in U$ ist

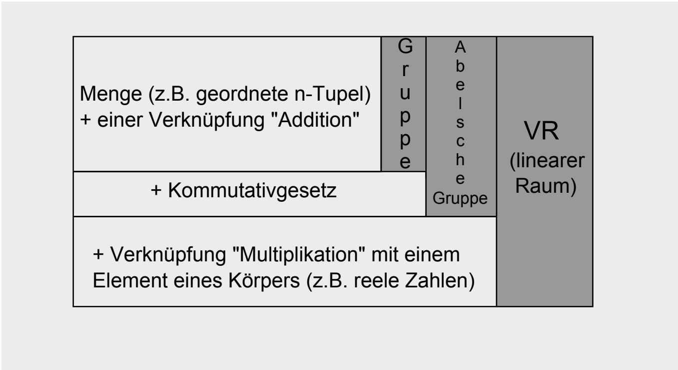

Abbildung 1: Zusammenhang zwischen den Definitionen einer Gruppe und eines Vektorraums

Bemerkung:

- Ein Unterraum U eines $\mathbb{K}$ Vektorraums V ist wieder ein $\mathbb{K}$ Vektorraum. Dies kann man sich zu nutze machen, wenn man beweisen soll, dass ein Raum U ein VR ist. Es genügt zu zeigen, dass U ein Untervektorraum eines größeren VR V ist und (U1) und (U2) gelten.
- Mit der Eigenschaft (U2) zeigt man, dass der Untervektorraum U mit den Verknüpfungen "+" und "·" wieder auf sich selbst abgebildet wird, man sagt er sei **abgeschlossen**.

3.2 Linearer Aufspann

Sei V ein VR über $\mathbb{K}$. Sei $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann heißt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n \tag{1}$$

mit Vektoren $\vec{a}_i \in V$ und Skalaren $\alpha_i \in \mathbb{K}$ **Linearkombination** von $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$. Die Menge aller möglichen Linearkombinationen von Elementen von M nennt man den **linearen Aufspann** lin(M).lin(M) ist ein Untervektorraum von V.

$$\text{lin(M)} := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i : \, m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{K}, \vec{a}_i \in M \right\} \tag{2}$$

Beispiel

Schauen wir uns die Menge X = $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ an. Durch Addition von bestimmten Vielfachen der zwei Vektoren kann man jeden Vektor im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ darstellen. Der lineare Aufspann der Vektoren ist also der $\mathbb{R}^2$.

3.3 Lineare Abhängigkeit

Sei V ein VR über $\mathbb{K}$ und $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m \in V$ sowie $\alpha_1, ..., \alpha_m \in K$

$\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m$ linear unabhängig $:\Leftrightarrow$
für alle $\alpha_1, ..., \alpha_m \;\; : \alpha_1\vec{a}_1 + \cdots \alpha_m\vec{a}_m = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \cdots \alpha_m) = (0, \cdots, 0)$

Diese Bedingungen führen jeweils auf Gleichungssysteme für die Koeffizienten α_i. Durch Lösung des LGS kann man dann auf lineare Abhängigkeit schließen. Sind die Vektoren nicht **linear unabhängig** (l.u.) so nennt man sie **linear abhängig**.

3.4 Basis

Sei V ein VR und $B \subseteq V$. B heißt **Basis** von V, wenn

1. lin(B) = V
2. $\vec{b}_i \in$ B sind linear unabhängig

Das bedeutet also, dass man jeden Vektor in V als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_i$ der Basis darstellen kann. Oder nochmals anders ausgedrückt: jeder Vektor $\vec{v} \in$ V lässt sich auf genau eine Art und Weise nach Vektoren einer Basis B entwickeln

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{b}_1 + ... + \alpha_n\vec{b}_n \tag{3}$$

Die Zahlen $\alpha_1, ..\alpha_n$ sind somit die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ bezüglich der Basis B

3.4.1 Dimension

Sei B eine Basis des VR V, dann nennt man die Anzahl n der Elemente in B (also die Anzahl der Basisvektoren) die **Dimension** von V. Man schreibt $\dim(V) = n$. Da die Basen zu einem spezifischen VR immer die gleiche Anzahl linear unabhängiger Vektoren haben, hat ein VR auch immer nur eine Dimension.
Beispiele:

- $dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $dim(\{0\}) = 0$

3.5 Lineare Abbildung

Seien V,W zwei VR. Eine Abbildung $\phi\colon V \to W$ heißt lineare Abbildung, wenn für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt :

1. $\phi(\vec{v} + \vec{w}) = \phi(\vec{v}) + \phi(\vec{w})$
2. $\phi(\alpha\vec{v}) = \alpha\phi(\vec{v})$

Bemerkung
Der Nullvektor wird durch eine lineare Abbildung immer auf sich selbst abgebildet.
Beweis:

$$\phi(\vec{0}) = \phi(\vec{0} + \vec{0}) = \phi(\vec{0}) + \phi(\vec{0}) \quad | - \phi(\vec{0}) \tag{4}$$

$$\vec{0} = \phi(\vec{0}) \tag{5}$$

Erfüllt eine Abbildung diese Eigenschaft nicht, so ist sie automatisch nicht linear. I.A. muss man für den Nachweis, ob eine Abbildung linear ist jedoch die Kriterien der Linearität(1.,2.) explizit nachrechnen.

3.5.1 Kern,Bild und Dimensionsformel

Hier will ich kurz auf einige Begriffe im Zusammenhang mit linearen Abbildungen eingehen. Sei $\phi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

- Der **Kern** ist die Menge aller Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden

$$\mathrm{Kern}(\phi) :=\left\{\vec{v} \in V | \phi(\vec{v}) = \vec{0}\right\} \subseteq V \tag{6}$$

- Das **Bild** ist der lineare Aufspann der Bildvektoren $\phi(\vec{v})$

$$\mathrm{Bild}(\phi) = \phi(V) := \{\phi(\vec{v}) | \vec{v} \in V\} \subseteq W \tag{7}$$

- Die Dimensionsformel besagt : Die Dimension von V ist gleich der Summe der Dimensionen des Kerns und des Bilds von ϕ.

$$\dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{Kern}\phi) + \dim(\mathrm{Bild}\phi)$$

Bemerkungen:

- ϕ injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(\phi) = \left\{\vec{0}\right\}$
- ϕ surjektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Bild}(\phi) = \mathrm{W}$
- ϕ bijektiv $\Leftrightarrow$ ϕ surjektiv und injektiv
  bijektive Abbildungen sind umkehrbar

3.5.2 Isomorphismus

Seinen V,W VR über $\mathbb{K}$

V isomorph zu *W* $\Leftrightarrow$ es existiert eine bijektive Abbildung $\phi : V \rightarrow W$

Jede solche Abbildung ϕ heißt dann **Isomorphismus**.

Bemerkungen:

- Isomorph heißt "gleichstrukturiert". Sind V,W isomorph so ist es, locker gesprochen, egal ob man in V oder W rechnet auch wenn die geometrische oder physikalische Bedeutung der Objekte in V bzw. W unterschiedlich sein kann.

4 Skalarprodukt

Betrachten wir zwei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ im $\mathbb{R}^3$. Der Winkel zwischen den beiden sei ϕ. Das Skalarprodukt ist nun ein Produkt zwischen zwei Vektoren (es ist also eine Verknüpfung innerhalb eines VR), dessen Ergebnis ein Skalar ist.

$$(\vec{a}\,|\vec{b}\,) := \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i = ||\,\vec{a}\,|| \cdot ||\,\vec{b}\,|| \cdot \cos\phi \tag{8}$$

Bemerkungen:

- $\vec{a}$ steht senkrecht auf $\vec{b} \Rightarrow (\vec{a}\,|\vec{b}\,) = 0$
- $\frac{(\vec{a}\,|\vec{b}\,)}{||\,\vec{a}\,||} = ||\,\vec{b}\,|| \cos\phi$ ist die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

Diese Definition kennt ihr wahrscheinlich schon aus der Schule. Man kann das Skalarprodukt jedoch auch axiomatisch durch folgende Bedingungen einführen.

1. $(\vec{a} + \vec{b}\,|\vec{c}\,) = (\vec{a}\,|\vec{c}\,) + (\vec{b}\,|\vec{c}\,)$
2. $(\alpha\vec{a}\,|\beta\vec{b}\,) = \alpha\bar{\beta}(\vec{a}\,|\vec{b}\,)$
3. $(\vec{a}\,|\vec{b}\,) = \overline{(\vec{b}\,|\vec{a}\,)}$
4. $(\vec{a}\,|\vec{a}\,) \geq 0$ und $(\vec{a}\,|\vec{a}\,) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Somit gilt für das Skalarprodukt im komplexen $\mathbb{C}^n$

$$(\vec{a}\,|\vec{b}\,) := \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \overline{b_i} \tag{9}$$

Die Axiome 1-5 lassen aber auch viel abstraktere Formen für ein Skalarprodukt zu, so ist der Ausdruck

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g^*(x)dx \qquad \text{f,g} : [a,b] \in \mathbb{C} \to \mathbb{C} \tag{10}$$

das Skalarprodukt für Funktionen.
In einem VR mit Skalarprodukt gilt die wichtige **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y) \tag{11}$$

Ich will im folgenden noch kurz auf die Schreibweise des Skalarprodukts mit Indizes eingehen, da dies eine elegante Möglichkeit der Rechnung eröffnet. Seien $\vec{e}_i$ (i=1,2,3) die kartesischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}) &= (\sum_i a_i \vec{e}_i, \sum_k b_k \vec{e}_k) \\ &= \sum_i \sum_k a_i b_k (\vec{e}_i, \vec{e}_k) \\ &= \sum_i \sum_k a_i b_k \delta_{ik} \\ &= \sum_i a_i b_i\end{aligned}$$

An dieser Stelle habe ich das Kroneckersymbol definiert

$$\delta_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad i = k \\ 0, & \text{wenn} \quad i \neq k \end{cases} \tag{12}$$

4.1 Norm

Mit einem Skalarprodukt „· “ist die **Norm** eines Vektors $\vec{x}$ definiert als

$$|| \vec{x} || \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \tag{13}$$

Dies entspricht der Länge des Vektors. Auch die Norm kann man axiomatisch formulieren als Abbildung von V nach $\mathbb{R}$

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.
Eine Abbildung

$$|| \cdot || : V \to \mathbb{R}, \quad \vec{a} \to || \vec{a} ||$$

heißt **Norm** auf V, wenn folgendes gilt:

i) $|| \vec{a} || \geq 0 \quad \text{und} \quad || \vec{a} || = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = 0$

ii) $|| \alpha \vec{a} || = |\alpha| \cdot || \vec{a} ||$

iii) $|| \vec{a} + \vec{b} || \leq || \vec{a} || + || \vec{b} ||$

Ist V ein VR und $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ eine Norm auf V, so nennt man V einen normierten Raum.

5 Vektorprodukt

Ein „inneres "Produkt, dass zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ auf den Vektor $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ abbildet.

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Es reicht sich lediglich die erste Zeile zu merken. Die anderen Zeilen erhält man dann durch zyklisches Vertauschen $(1 \to 2 \to 3 \to 1)$.
Eigenschaften:

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$
2. $(\alpha \vec{x}) \times \vec{y} = \alpha(\vec{x} \times \vec{y})$
3. $\vec{z} \times (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{z} \times \vec{x} + \vec{z} \times \vec{y})$

Geometrische Interpretation:

- $\vec{x}, \vec{y}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow \vec{x} \times \vec{y}$ steht senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$
- $|| \vec{x} \times \vec{y} || = || \vec{x} || \cdot || \vec{y} || \cdot \sin(\phi)$ ist die Fläche des von den Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms
- Die Vektoren $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Auch hier wollen wir das ganze in mit Indizes schreiben; wieder mit kartesisch orthonormierten Vektoren $\vec{e}_i$

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= \sum_j x_j \vec{e}_j \times \sum_k y_k \vec{e}_k \\ &= \sum_j \sum_k (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) x_j y_k \end{aligned}$$

Betrachten wir im folgenden nur die i-te Komponente des Kreuzprodukts

$$\begin{aligned} [\vec{x} \times \vec{y}]_i &= \sum_j \sum_k (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)_i x_j y_k \\ &= \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} x_j y_k \end{aligned}$$

Wie beim Skalarprodukt haben wir hier auch ein neues Symbol ϵ_{ijk}, das Levi-Civita-Symbol (kurz: ϵ Tensor) eingeführt

$$\epsilon_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)_i = \begin{cases} 0 & \text{falls zwei Indizes gleich sind} \\ 1 & \text{falls } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{falls } ijk = 213, 132, 321 \end{cases} \tag{15}$$

Oft ist auch folgende Relation wichtig

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{16}$$

6 Gram Schmidt Orthogonalisierungsverfahren

Verfahren zur Konstruktion einer Orthonormalbasis (d.h. die Basisvektoren sind senkrecht zueinander und haben Länge 1)
Sei $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ eine Basis eines VR V. Ziel ist es nun aus den $\vec{a}_i$ Vektoren $\vec{b}_i$ zu konstruieren die orthonormal sind und eine Basis bilden. Wir gehen wie folgt vor:

1. Normiere den ersten Vektor

$$\vec{b}_i = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} \tag{17}$$

2. Projeziere nächsten Vektor $\vec{a}_{k+1}$ auf zuvor normierten Vektor $\vec{b}_i$ und konstruiere einen orthogonalen Vektor $\vec{a}_{\perp,k+1}$

$$\vec{a}_{\perp,k+1} = \vec{a}_{k+1} - \vec{a}_{\|,k+1} = \vec{a}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, \vec{b}_i)\vec{b}_i \tag{18}$$

3. Normieren

$$\vec{b}_{k+1} = \frac{\vec{a}_{\perp,k+1}}{|\vec{a}_{\perp,k+1}|} \tag{19}$$

4. Schritt 2 uns 3 so lange durchführen bis die Basis $\left\{\vec{b}_i\right\}$ komplett ist

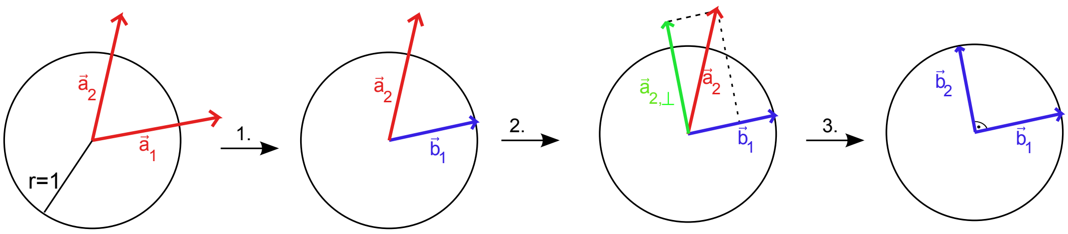

Abbildung 2: Graphische Darstellung zum Gram-Schmidt Verfahren

7 Matrizen

Ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten nennt man $(m \times n)$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Im folgenden drücken wir die Matrizen durch ihre Komponenten (a_{ij}) aus : $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$.
Man addiert Matrizen, indem man die jeweiligen Komponenten miteinander addiert, bei Multiplikation mit einem Skalar α multipliziert man jede Komponente mit α

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{21}$$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) \tag{22}$$

Beachte
Man kann zwei Matrizen nur addieren, wenn sie die gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten besitzen.

7.1 Matrixmultiplikation

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ so ist das Produkt der Matrizen $A \cdot B = C$ eine $m \times p$ Matrix.

$$A \cdot B = (c_{ij})_{m \times p} \qquad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \tag{23}$$

Man bildet also immer das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B. Als Eselsbrücke kann man sich „Zeile mal

Spalte “merken.
Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Bemerkung
Die Multiplikation einer Matrix A mit einem n-dim Vektor entspricht der Matrixmultiplikation von A mit einer $(n \times 1)$ Matrix. Somit kann man auch ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots & +a_{mn}x_n = b_n \end{pmatrix} \tag{25}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})$ und den Vektoren $\vec{x}\,,\vec{b}$ als Matrixgleichung schreiben

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{26}$$

Einige Hinweise:

1. (A+B)C = AC+BC
2. Sei $A = (a_{ij})$, dann ist die Transponierte Matrix $A^T = (a_{ji})$, d.h. man vertauscht Zeilen und Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{27}$$

3. Die adjungierte Matrix ist $A^* \equiv \overline{A}^T = (\overline{a}_{ji})$, d.h. man transponiert die Matrix und komplex konjugiert die Komponenten

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 & 3 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & -i \end{pmatrix} \tag{28}$$

7.2 Rang einer Matrix

Der **Rang** einer Matrix A ist die Anzahl der linear unabhängigen Spalten- bzw. Zeilenvektoren (es gilt immer Zeilenrang = Spaltenrang).
Elementare **Zeilenumformungen** ändern den Rang einer Matrix (und die Lösungsmenge des zugehörigen LGS) nicht:

1. Vertauschen von Zeilen
2. Eine Zeile mit einem Skalar $\alpha \neq 0$ multiplizieren
3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Mit diesen Umformungen können wir eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ auf Zeilennormalform (ZNF) bringen. In dieser Form kann man den Rang direkt ablesen. Am besten veranschaulicht man sich das an einem Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ 3 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - 2Z_1]{Z_3 \to Z_3 - 3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 3Z_2]{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

An der Normalform können wir sofort die zwei l.u. Spaltenvektoren (1,0,0) und(0,1,0) ablesen. Es gilt also Rang(A)=2.

7.3 Darstellungsmatrizen

Um mit linearen Abbildungen rechnen zu können ordnet man jeder Abbildung ϕ eine Darstellungsmatrix A zu. Die Abbildung eines Vektors $\vec{x}$ auf den Bildraum erhält man dann durch Matrixmultiplikation $A\vec{x}$. Wie erhält man nun die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung?
Sei ϕ: $V \to W$ linear, $\vec{v} \in V$ und $\left\{\vec{b}_1, ...\vec{b}_n\right\}$ eine Basis von V.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{v}) &= \phi(v_1\vec{b}_1 + ... + v_n\vec{b}_n) && (29) \\ &= v_1\phi(\vec{b}_1) + ... + v_n\phi(\vec{b}_n) && (30) \\ &= \underbrace{(\phi(\vec{b}_1), ..., \phi(\vec{b}_n))}_{\equiv A} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} && (31) \\ &= A\vec{v} && (32) \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass man einen Vektor nach einer beliebigen Basis entwickeln kann, sowie im nächsten Schritt die Linearität von ϕ.
Die i-te Spalte von A, $\phi(\vec{b}_i)$, ist also der Koordinatenvektor des Bilds des i-ten Basisvektors aus V dargestellt in einer Basis aus W.

7.4 Lineare Gleichungssysteme

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $\vec{y} \in \mathbb{C}^m$. Wir suchen alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, die das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$A\vec{x} = \vec{y} \tag{33}$$

lösen.
Die allgemeine Lösung erhält man durch Kombination der Lösung des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ und einer partikulären Lösung von $A\vec{x} = \vec{y}$.

$$\vec{x} = \vec{x}_{hom} + \vec{x}_{part} \tag{34}$$

I.A. kann die homogene Gleichung von einer ganzen Menge Vektoren gelöst werden $\{\vec{x}_1, ..\vec{x}_k\}$. Man spricht hier in Analogie zur linearen Abbildung vom **Kern** der Matrix A. Die homogene Lösung erhält man dann durch Linearkombination der Vektoren die Kern(A) aufspannen.

$$\vec{x}_{hom} = \sum_i^k \alpha_i \vec{x}_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{C} \tag{35}$$

Das **Bild** der Matrix A ist der lineare Aufspann der Spaltenvektoren von A. Sei $A = \{\vec{a}_1, ..\vec{a}_n\}$ mit den Spaltenvektoren $\vec{a}_i \in \mathbb{C}^m$. So erhalten wir aus $A\vec{x} = \vec{y}$

$$x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{y} \tag{36}$$

d.h. alle Vektoren des Bildraums $\vec{y}$ sind durch eine Linearkombination der $\vec{a}_i$ darstellbar oder anders die Spaltenvektoren $\{\vec{a}_i\}$ bilden eine Basis des Bildraums. Somit gilt $\dim((\{\vec{a}_i\})) = \dim(\text{Bild A})$, d.h. die Menge der linear unabhängigen Spaltenvektoren gibt die Dimension des Bildraums an.
Die Anzahl der l.u. Spaltenvektoren ist gleich der Anzahl l.u. Zeilenvektoren und heißt **Rang** der Matrix A.
Man kann den Kern-Bild Dimensionssatz also auch für die Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ einer linearen Abbildung aufschreiben:

$$\dim(\text{Kern A}) + \text{Rang A} = \text{n}$$

Zum Schluss wollen wir uns noch mit der Frage beschäftigen, wann ein LGS $A\vec{x} = \vec{y}$ überhaupt lösbar ist ?
Wenn man (36) betrachtet ist das genau der Fall, wenn $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n, \vec{y}\}$ linear abhängig sind. Das Kriterium in diesem Fall lautet

$$\text{Rang(A)} = \text{Rang}(A\|\vec{y})$$

Rang(A$\|\vec{y}$) ist dabei die um den Spaltenvektor $\vec{y}$ erweiterte Matrix A.

7.4.1 Eliminationsverfahren von Gauß

Zu lösen ist das LGS $A\vec{x} = \vec{y}$. Dies können wir in Kurzform als erweiterte Matrix $(A|\vec{y})$ schreiben. Wir gehen zur Lösung wie folgt vor

1. Bringe die erweiterte Matrix auf ZNF
2. Lies sukzessiv die Lösungen ab

Ist Rang(A)=Rang($(A|\vec{y})$) so ist die partikuläre Lösung eindeutig (Lösbarkeitskriterium).
Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 10 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 14 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[wie \quad oben]{Zeilenumformung} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{37}$$

Nun wählen wir $x_4 = \alpha$ beliebig. Damit ist $x_3 = -2\alpha$. Mit $x_2 = \beta$ ist $x_1 = 1 + 2\alpha - 2\beta$. Somit erhalten wir für die homogene $\vec{x}_h$ und partikuläre $\vec{x}_p$ Lösung

$$\vec{x}_h = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Die Lösung des LGS ergibt sich durch Linearkombination der homogenen und partikulären Lösung $\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p$. Der Kern von A entspricht der Lösungsmenge der homogenen Gleichung und das Bild von A wird von 2 l.u. Bildvektoren $\vec{y}_i$ aufgespannt, dafür können wir z.B. die Bilder der Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_3$ wählen.

$$\text{Kern(A)} = \text{Lin}\left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \quad , \quad \text{Bild(A)} = \text{Lin}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \tag{39}$$

7.5 Die inverse Matrix

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **invertierbar**, wenn eine andere Matrix A^{-1} existiert, so dass

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1_n \tag{40}$$

mit der n-dim. Einheitsmatrix 1_n.
Anstatt invertierbar kann man auch sagen die Matrix ist **regulär**. Ist die Matrix nicht invertierbar nennt man sie **singulär**.
Im Prinzip haben wir zur Bestimmung der Einheitsmatrix ein Gleichungssystem von Matrizen zu lösen. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Gesucht ist die Matrix X mit

$$AX = B \tag{41}$$

Wir gehen zur Lösung vor wie beim Gauß Algorithmus, d.h. wir schreiben die erweiterte Matrix auf und bringen die linke Seite auf ZNF (hier in die Form der Einheitsmatrix). Die gesuchte Matrix steht dann auf der rechten Seite.
Bei der Inversen ist die gesuchte Matrix $X = A^{-1}$ und $B = 1_n$ also $AA^{-1} = 1_n$
Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

Bemerkung

- nur wenn Rang(A)=n ist die Gleichung $AA^{-1} = 1_n$ eindeutig lösbar, d.h. A^{-1} ist eindeutig
- In der Praxis geht es am schnellsten sofort A^{-1} zu berechnen ohne vorher den Rang zu überprüfen. Gelingt es bei den Umformungen nicht die linke Seite in die Einheitsmatrix umzuformen ist A nicht regulär.
- hat man A^{-1} berechnet kann man damit Matrixgleichungen lösen. Multipliziert man z.B. ($A\vec{x} = \vec{y}$) von links mit A^{-1} erhält man ($\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$). Da es i.A. aber länger dauert die inverse Matrix zu bestimmen als den Gauß Algorithmus auszuführen ist diese Vorgehensweise nur sinnvoll, wenn man die inverse Matrix bereits bestimmt hat.