Ergänzung zur HMI ÜB Nr.1-6

Patrik Hlobil Niko Kainaris

Dieses Dokument erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit. Es stellt keine Vorlesungszusammenfassung dar, sondern soll euch lediglich bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben helfen

1 Logik

1.1 Aussagenlogik

Definition

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (1) oder falsch (0) ist. Sind A und B Aussagen, so lassen sich mit Hilfe von Junktoren (d.h. "Verbinder") neue Aussagen herstellen

Junktor	Bedeutung	Zeichen
Negation	nicht A	$\neg A$
Konjugation	A und B	$A \wedge B$
Adjunktion	A oder B	$A \vee B$
Implikation	wenn A dann B	$A \Rightarrow B$
Äquivalenz	A genau dann, wenn B	$A \Leftrightarrow B$

Die Wahrheitswerte der so zusammengesetzten Aussagen sind durch folgende Tabelle definiert (Tabellen dieser Art nennt man allgemein Wahrheitstabelle)

A	B	¬A	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

Aussagen, die stets wahr sind nennt man Tautologien. Kontradiktionen sind dagegen Aussagen, die stets falsch sind. Einige Tautologien, die man sich merken sollte sind:

1. $(\neg\neg A \Leftrightarrow A)$
2. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
3. $((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
4. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

5. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Bemerkung: Besonders die beiden letzten Regeln (4) und (5) sind wichtig, d.h. die Negation dreht das und (bzw. oder) Zeichen einfach um. Diese Regeln nennt man auch De Morgansche Regeln.
Beispiel:
Wir wollen nun die de Morganschen Regeln beweisen. Zunächst nutzen wir dazu eine Wahrheitstabelle und dann beweisen wir die zweite rechnerisch

$$\text{Zu zeigen a)} \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

A	B	¬A	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
W	W	F	F	F	W	F
W	F	F	W	W	F	W
F	W	W	F	W	F	W
F	F	W	W	W	F	W

Vergleichen wir die Wahrheitswerte der ersten und dritten Zeile von rechts, dann sehen wir dass die beiden Aussagen äquivalent sind.
Kommen wir nun zur rechnerischen Methode. Allgemein kann man hier oft die Relationen (1) oder (2) von oben nutzen. In unserem Fall braucht man aber nur das Ergebnis aus a).

$$\text{Zu zeigen b)} \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \overset{\text{a)}}{\Leftrightarrow} \neg\neg(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

1.2 Aussageform

Aussageformen sind Aussagen, die von Variablen abhängen.
Beispiel:

$$A(x) :\Leftrightarrow x > 1$$

Dieser Aussage kann man erst einen Wahrheitswert zuordnen, wenn man eine konkrete Variable x einsetzt.
Quantoren erlauben Aussagen über eine ganze Klasse von Objekten. Man nennt $\forall$ den Allquantor und $\exists$ den Existenzquantor. Es gilt

- $\forall x \in X : A(x)$ lies: Für alle x aus X gilt die Aussage A(x)
- $\exists x \in X : A(x)$ lies: Es gibt mindestens ein x aus X für das die Aussage A(x) gilt

Seien $x_1, x_2, \cdots x_n$ Variablen für die Aussageform A(x), so gelten folgende Äquivalenzen

$$\forall x \in X : A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge \cdots A(x_n)$$
$$\exists x \in X : A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \vee A(x_2) \vee \cdots A(x_n)$$

Da nach den de Morganschen Regeln die Negation und und oder Zeichen umdreht gilt folgender Zusammenhang zwischen den beiden Quantoren

$$
\begin{aligned}
\neg\,(\forall x : A(x)) &\Leftrightarrow \exists x : \neg A(x) \\
\neg\,(\exists x : A(x)) &\Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)
\end{aligned}
$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\neg\,(\forall x : A(x)) &\Leftrightarrow \neg\,(A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge \cdots \wedge A(x_n)) \\
&\Leftrightarrow \neg A(x_1) \vee \neg A(x_2) \vee \cdots \vee \neg A(x_n) \\
&\Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)
\end{aligned}
$$

Beispiel:
Sei S die Menge aller Studenten,d.h.

$$S := \{x | x \text{ist Student}\}$$

Die Aussage : 'Alle Studenten tragen eine Brille' wäre dann kurz

$$\forall x \in S : A(x)$$

wobei A(x) die Aussageform ist, dass x eine Brille trägt. Negieren wir dies erhalten wir

$$\neg\,(\forall x \in S : A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in S : \neg A(x)$$

Die Negation wäre also: 'Es existiert mindestens ein Student der keine Brille trägt'.

1.3 Mengenlehre

Definition
Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen[1].
Beispiel

$$M = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}, \}$$

Lies: M ist die Menge aller Elemente x, für die gilt x=2n, d.h. M ist die Menge aller Geraden natürlichen Zahlen.
Bemerkung
$\in$ liest man als 'Element von' z.B. heißt $n \in \mathbb{N}$, dass n ein Element der Menge $\mathbb{N}$ ist, d.h. n ist eine natürliche Zahl.

[1] Dies ist nicht die heute in der Mathematik verwendete Definition, da sie einige Unklarheiten zulässt. Für alle Zwecke eines Naturwissenschaftlers ist sie jedoch ausreichend

Seien M und N Mengen dann sind folgende Verknüpfungen ebenfalls Mengen

$$\begin{aligned}
M \cup N &:= \{x \mid x \in M \vee x \in N\} && \text{Vereinigung} \\
M \cap N &:= \{x \mid x \in M \wedge x \in N\} && \text{Durchschnitt} \\
M \backslash N &:= \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\} && \text{Differenz} \\
M \subseteq N &:\Leftrightarrow x \in M \Rightarrow x \in N && \text{M ist Teilmenge von N} \\
M \subset N &:\Leftrightarrow (M \subseteq N) \wedge (M \neq N) && \text{M ist echte Teilmenge von N} \\
M = N &:\Leftrightarrow x \in M \Leftrightarrow x \in N && \text{M ist gleich N} \\
M \times N &:= \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\} && \text{kartesisches Produkt}
\end{aligned}$$

Ist N eine (echte) Teilmenge von N so bezeichnet

$$\mathcal{C}_M N := M \backslash N$$

das Komplement von N bezüglich M. Für zwei Teilmenge $N, L \subset M$ gelten die de Morganschen Regeln

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_M (N \cap L) &= \mathcal{C}_M N \cup \mathcal{C}_M L \\
\mathcal{C}_M (N \cup L) &= \mathcal{C}_M N \cap \mathcal{C}_M L
\end{aligned}$$

Die Menge, die keine Elemente enthält nennt man Nullmenge $\emptyset$. Haben zwei Mengen keine gemeinsamen Elemente, d.h. $M \cap N = \emptyset$ so nennt man sie **disjunkt**.
Rechenregeln für Mengen ergeben sich sofort aus folgenden Analogien zur Aussagenlogik

Mengen	A	$\cap$	$\cup$	$\mathcal{C}$	$\subset$	$=$	$\emptyset$
Aussagen	A(x)	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$A \wedge \neg A$

1.3.1 Zahlenmengen

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \cdots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \left\{r \mid r = \frac{l}{m};\ l, m \in \mathbb{Z}\right\}$ rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$ reelle Zahlen, umfassen alle bisherigen Zahlenmengen und außerdem jede beliebige Dezimalzahl, die nicht als Bruch darstellbar ist z.B. π

2 Abbildungen

Eine Abbildung f aus einer Menge A in eine Menge B ist eine Vorschrift die jedem Element x aus A *genau ein* Element f(x) aus B zuordnet. Man schreibt $f : A \to B$.
Man nennt A die Definitionsmenge und B die Wertemenge.

1. Die Menge

   $$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$$

   nennt man **Bild** von f über A.

2. **Injektivität**

   $$\forall x, y \in B : \;\; x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)$$

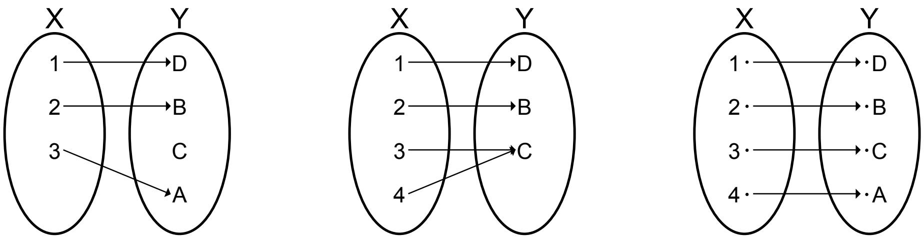
   Eine Funktion ist genau dann injektiv, wenn einem x auch nur genau ein y zugeordnet wird.

3. **Surjektivität**

   $$\forall y \in B \;\exists\; x \in A : \;\; f(x) = y$$

   D.h. alle Werte der Wertemenge müssen von der Funktion $f(x)$ angenommen werden. Oder anders ausgedrückt das Bild von f ist identisch mit der Wertemenge: $f(A) = B$.

4. **Bijektivität**
   Bijektivität einer Funktion $f(x)$ haben wir, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
   Bijektive Abbildungen sind umkehrbar, d.h. es existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$.



(a) injektiv (b) surjektiv (c) bijektiv

Abbildung 1: Mengendiagramm zur Verdeutlichung der Abbildungsbegriffe

2.1 Genaue mathematische Definition

Seien M,N Mengen

1. Eine Teilmenge $F \subset M \times N$ heißt **Abbildung** aus M nach N, wenn gilt

$$(x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \quad \Rightarrow \quad y = z \qquad (x \in M, y \in N)$$

   d.h. jedem Element x aus M wird *genau ein* Element f(x)=y aus N zuordnet

2. Sei $F \subseteq M \times N$ eine Abbildung. Die Mengen

$$\begin{aligned} F^{-1}(N) &:= \{x \,|\, x \in M, \text{ es gibt ein } y \in N \text{ mit } (x, y) \in F\} \\ F(M) &:= \{y \,|\, y \in N, \text{ es gibt ein } x \in M \text{ mit } (x, y) \in F\} \end{aligned}$$

   heißen Urbildbereich und Bildbereich von F.

3. Seien $F : M \to N$ und $G : N \to L$ Abbildungen, $x \in M$. Die Komposition der Abbildungen ist definiert über

$$(F \circ G)(x) := F(G(x))$$

   Die Verknüpfung $\circ$ erfüllt das Assoziativgesetz $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$

4. Sei $F \subseteq M \times N$ eine Abbildung. F ist Abbildung von M nach N $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{D}(F) = M$
   F ist surjektiv $:\Leftrightarrow \quad \mathbb{W}(F) = N$
   F ist injektiv $:\Leftrightarrow \quad (x_1, y) \in F \wedge (x_1, y) \in F \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$
   F ist bijektiv $:\Leftrightarrow$ F surjektiv und injektiv

3 Funktionen

Abbildungen von $D \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heißen (reelle) Funktionen.
Beispiel:

$$f : D \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Für f(x) gilt

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| \neq 1\}$$
$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y < 0 \vee y \geq 1\}$$

Wir stellen also fest, dass f(x) weder surjektiv ($f(D) \neq \mathbb{R}$) noch injektiv (z.B. f(2)=f(-2) obwohl $2 \neq -2$) ist. Somit besitzt f(x) auch keine Umkehrfunktion.

Betrachten wir dagegen die bijektive Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = x + 1$$

Wir können die Gleichung durch Äquivalenzumformungen(!) umkehren. Somit ist die Funktion bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} g(x) = y &= x + 1 \\ \Leftrightarrow x &= y - 1 \\ \Rightarrow g^{-1}(x) &= x - 1 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir noch die Variable statt y wieder x genannt.
Einige weitere wichtige Begriffe sind

- Man nennt eine Funktion gerade, wenn $f(x) = f(-x)$ und ungerade, wenn $f(x) = -f(-x)$ gilt
- Man definiert die Verkettung "$\circ$" von zwei Funktionen

$$(f \circ g) := f(g(x)) \qquad (x \in D(g) \wedge g(x) \in D(f))$$

3.1 Explizite Berechnung von Definitionsbereich und Bild

Hier ein Beispiel wie man den Definitionsbereich D und das Bild $f(D)$ der Funktion (1) (siehe oben) berechnet.

- **Definitionsbereich** : „Alle x-Werte, die man in die Funktionsgleichung einsetzen darf "

  $$D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \neq 1\}$$

  Dies sind hier alle x-Werte bis auf $x = \pm 1$, da man dann durch 0 teilen würde. Allgemein gilt es hier auf Werte zu achten, an denen die Funktion nicht definiert ist, und diese auszuschließen.

  So darf man z.B. bei $h(x) = \sqrt{x}$ für x keine negativen Werte einsetzen.

- **Bild**

  Um das Bild zu berechnen invertieren wir die Funktionsgleichung (das geht hier nicht mit Äquivalenzumformungen, da die Funktion nicht bijektiv ist) und bestimmen den Definitionsbereich der invertierten Gleichung:

  $$\begin{aligned} f(x) \equiv y = \frac{1}{1-x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad y - x^2 y = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad y - 1 = x^2 y \\ &\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{y}} \end{aligned}$$

  Damit dieser Ausdruck definiert ist muss der Term unter der Wurzel positiv sein

  $$1 - \frac{1}{y} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{1}{y}$$

  Fallunterscheidung :
  (i) $y > 0$: $\quad 1 \geq \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y \geq 1$
  Also $y > 0 \wedge y \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq 1$.

  (ii) $y < 0$: $\quad 1 \geq \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 1$
  Also $y < 0 \wedge y \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad y < 0$.
  Somit erhalten wir zusammen

  $$f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0 \vee y \geq 1\}$$

  Beachtet: f(x) hat zwar keine Umkehrfunktion, wir können die Funktionsgleichung aber trotzdem invertieren und erhalten wie oben gezeigt:

  $$x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{y}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

  Die invertierte Gleichung ist aber keine Zuordnungsvorschrift für eine Funktion, da sie nicht eindeutig ist (z.B. hat der x-Wert 2 die Funktionswerte $\pm 1/\sqrt{2}$)

4 Rechnen mit Beträgen

Der Betrag ist definiert:

$$a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, so gelten folgende Regeln:

- $$|a| \geq 0 \quad \text{wobei} \quad |a| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$$
- $$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$
- Dreiecksungleichung
$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

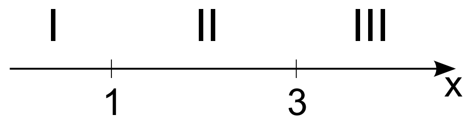
Man kann den Betrag auch geometrisch interpretieren. Der Abstand d von zwei Zahlen x und a auf der Zahlengeraden ist: $d = |x - a|$
I.A. ist es oft praktisch Fallunterscheidungen zu machen. Dazu betrachtet man bestimmte kritische Stellen x

1. Stellen an denen der Ausdruck im Betrag das Vorzeichen wechselt
2. Stellen an denen der Term nicht definiert ist (z.B. Polstellen)

5 Rechnen mit Ungleichungen

Im Prinzip kann man mit Ungleichungen wie mit Gleichungen umgehen es gibt jedoch folgendes zu beachten. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, $b > 0$

- Multiplikation mit einer negativen Zahl ändert die Richtung der Ungleichung
$$\begin{aligned} a &< b \qquad | \cdot (-1) \\ -a &> -b \end{aligned}$$
- Bilden des Kehrwerts ändert die Richtung der Ungleichung wenn beide Seiten der Ungleichung das selbe Vorteichen haben
$$\begin{aligned} a &< b \\ \frac{1}{a} &> \frac{1}{b} \end{aligned}$$



Ungleichungen in denen zusätzlich Beträge vorkommen löst man mit Fallunterscheidungen.
Beispiel : $|x-1| < |x-3|$
Die Funktionen in den Beträgen wechseln bei x=1 bzw. x=3 die Vorzeichen. Wir zerteilen die Zahlengerade also wie in der Abbildung gezeigt und nutzen die Definition des Betrags (3)

- Fall 1 : $x < 1$

$$-(x-1) < -(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 3 \quad \text{wahre Aussage (w.A.)}$$

  In diesem Bereich erfüllen also alle x unsere Ungleichung.

- Fall 2 : $1 < x < 3$

$$(x-1) < -(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

  Diese Aussage ist im Einklang mit der zu Beginn gemachten Forderung $x \in [1,3]$ ist also ein erlaubtes Ergebnis.

- Fall 2 : $x > 3$

$$(x-1) < (x-3) \quad \Leftrightarrow \quad -1 < -3 \quad \text{falsche Aussage (f.A.)}$$

  Daher erfüllt kein x in diesem Bereich die Ungleichung

Ingesamt erhalten wir die Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, indem wir die Lösungsmengen aus allen Fällen kombinieren.

6 Beschränkte Mengen

Sei K ein geordneter Körper und M eine Teilmenge von K.

1. Ein Element $a \in K$ heißt **untere (obere) Schranke** von M, falls

$$a \leq x \ \text{ für alle } \ x \in M \qquad (\text{bzw.} a \geq x \ \text{ für alle } \ x \in M)$$

   Existiert eine untere (obere) Schranke von M, so heißt M **nach unten (oben) beschränkt**.
   Ist M nach unten und nach oben beschränkt so heißt M **beschränkt**.

2. $a \in K$ heißt **Infimum** (d.h. untere Grenze) von M (**Supremum**, d.h. obere Grenze von M), wenn gilt:
   a ist untere Schranke von M und es gibt keine untere Schranke von M, die größer ist als a

(a ist obere Schranke von M und es gibt keine obere Schranke von M, die kleiner ist als a)

Also : Infimum = größte untere Schranke, Supremum= kleinste obere Schranke

3. $a \in K$ heißt **Minimum** von M (**Maximum** von M), falls gilt:

a ist Infimum von M und $a \in M$
(a ist Supremum von M und $a \in M$)

Machen wir uns das anhand eines Beispiels klar:
Sei M eine Teilmenge der reelen Zahlen mit

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\} \tag{1}$$

Aus der Definition erkennen wir direkt dass $\inf(M) = 1$ ist da alle x echt größer als 1 sind. Zudem ist $\sup(M) = 4$, da 4 aber auch zu M dazugehört ist 4 sogar ein Maximum also $\max(M) = 4$.

6.1 Volständigkeitsaxiom

Sei K ein geordneter Körper. K heißt vollständig, wenn gilt

(V) Jede nach unten beschränkte, nicht leere Teilmenge von K besitzt ein Infimum

äquivalent kann man fordern

(V) Jede nach oben beschränkte, nicht leere Teilmenge von K besitzt ein Supremum

Bemerkung: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein vollständiger Körper.

7 Vollständige Induktion (VI)

Die vollständige Induktion ist ein wichtiges Beweismittel in der Mathematik, das auf den grundlegenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen basiert. Sei $A(n)$ eine Aussage und $n \in \mathbb{N}$. $A(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig, wenn gilt

1. Induktionsanfang (IA) : $A(n = 1)$ ist wahr
2. Induktionsvorraussetzung (IV) : Annahme $A(n)$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr
3. Induktionsschluss (IS) : Zu zeigen unter Verwendung von IV: auch $A(n+1)$ ist wahr

Ist man in der Lage den Induktionsschluss zu führen hat man allgemein gezeigt, dass die Aussage A(n) für alle n wahr ist.

8 Das Summenzeichen

Das Summenzeichen ist in der Mathematik sehr wichtig und deshalb solltet ihr euch so früh wie möglich mit der Verwendung der Summe vertraut zu machen. Wollen wir z.B. n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ miteinander addieren wird es für größere n sehr zeitaufwendig immer $a_1 + a_2 + ... + a_n$ zu schreiben. Eleganter geht dies mit dem Summenzeichen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n \tag{2}$$

k ist dabei der Summationsindex. Er nimmt nacheinander die Werte 1 bis n an, wobei k immer um 1 erhöht wird und das Summenzeichen die einzelnen Werte mit einem "+"verbindet.

Mit dem Summenzeichen kann man die Summe auch geschickt umformen indem man Indizes umnennt oder verschiebt

1. Man darf Summenindizes umbenennen, d.h.

   $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{l=1}^{n} a_l = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{3}$$

   welchen Buchstaben man also als Index verwenden will ist egal. Man sollte aber darauf achten, dass dieser Index nicht schon an anderer Stelle verwendet wird. Z.B hier also den Summenindex nicht n nennen, da das schon die obere Grenze der Summe ist.

2. Man kann den Index auch verschieben dann muss man aber auch die Summationsgrenzen anpassen,also

   $$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \underbrace{=}_{k=l-4} \quad \sum_{l=5}^{n+4} a_{l-4} \tag{4}$$

   hier habe ich den Index k als l-4 umdefiniert. Dabei ist jedoch wichtig dann auch die Grenzen der Summe entsprechend anzupassen,d.h.

   $$\begin{array}{rlcl} & k = l-4 & \Longleftrightarrow & l = k+4 \\ \Rightarrow & k = 1 & \widehat{=} & l = 1+4 = 5 \\ & k = n & \widehat{=} & l = n+4 \end{array}$$

3. Weiterhin kann man Summen auch auseinanderziehen, vereinigen, sowie konstante Faktoren vor die Summe ziehen. Diese Eigenschaften folgen direkt aus der Definition der Addition.

   $$\sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=1}^{50} a_k + \sum_{k=51}^{100} a_k \tag{5}$$

$$a_1 + \sum_{k=2}^{n-2} a_k + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{7}$$

9 Rechentechniken

Ich liste hier einfach einige wichtige Formeln auf, die ihr immer wieder brauchen werdet.

9.1 Arithmetische Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{8}$$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \tag{9}$$

$$= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \tag{10}$$

$$\Rightarrow (2) + (3): \qquad 2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$

$$= n(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{qed}$$

9.2 Geometrische Summenformel

Für $q \neq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{11}$$

Beweis: siehe Blatt 3 Aufgabe 6b

9.3 Fakultät

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{12}$$

Das Produkt $\prod_{k=1}^{n}$ ist dabei analog zum Summenzeichen, nur das aufeinanderfolgende Einträge mit mal $(\cdot)$ verknüpft werden.

9.4 Binomische Formel

Zunächst definieren wir den **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{13}$$

gesprochen „n über k“. Beachtet das die linke Seite einfach eine verkürzte Schreibweise der rechten Seite ist. Man berechnet n über k stets mit dem Ausdruck mit den Fakultäten.

Bemerkung:
Der Binomilakoeffizient ist ein Element er Kombinatorik und gibt die Anzahl der Möglichkeiten an aus einer Menge von n Objekten genau k auszuwählen. Beispiel: Wahrscheinlichkeit für 6er im Lotto $1/\binom{49}{6} = 1/13983816$

Damit kann man die allgemeine binomische Formel aufschreiben

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{14}$$

10 Komplexe Zahlen

Zunächst definieren wir die imaginäre Einheit i durch $i^2 := -1$. Komplexe Zahlen nennt man nun Audrücke z der Form

$$z = x + iy \tag{15}$$

mit x,y $\in \mathbb{R}$. Die Menge der komplexen Zahlen notiert man als

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \tag{16}$$

Man führt folgende Bezeichnungen ein

- x = Re(z) „Realteil von z“
- y = Im(z) „Imaginärteil von z“
- $\bar{z} := x - iy$ „Komplex konjugiertes von z“

Es gilt der wichtige Zusammenhang

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)\,(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{17}$$

10.1 Graphische Darstellung

Graphisch kann man die komplexen Zahlen in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darstellen (siehe Abb.1). Man erkennt folgende geometrischen Beziehungen

$$x = r\cos(\varphi) \tag{18}$$

$$y = r\sin(\varphi) \tag{19}$$

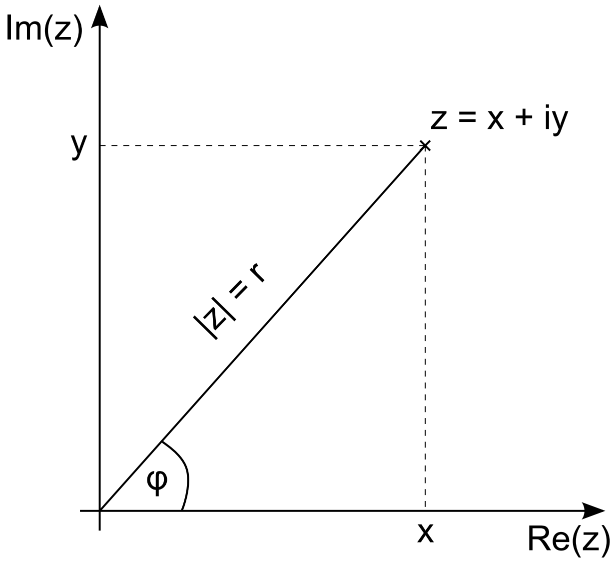


Abbildung 2: Darstellung in der komplexen Zahlenebene

Man kann nun eine komplexe Zahl auch mit den Variablen r,φ aufschreiben anstatt mit x,y. Man spricht dann von der **Polarkoordinatendarstellung**. Die Umrechnungvorschriften erhalten wir aus geometrischen Überlegungen (Abb. 1).

$$\begin{aligned} r \equiv |z| &= \sqrt{x^2+y^2} && \text{„Betrag von z “} \\ \varphi &= \arctan(\frac{y}{x}) && \text{„Argument von z “} \end{aligned}$$

Nach Definition ist das Argument arg(z) der Winkel der zwischen 0,2π liegt $arg(z) \in [0, 2\pi)$.
Wir erhalten

$$\begin{aligned} z &\stackrel{\text{def}}{=} x + iy = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right) \\ &= re^{i\varphi} \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir die Relationen (11),(12) verwendet. Die Umformung in die Eulersche Form mit der komplexen e-Funktion kann erst später unter Verwendung der Reihendarstellung bewiesen werden.

10.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Für die Eulersche Form gelten natürlich die gewohnten Potenzgesetze

$$\begin{aligned} \left(e^{i\varphi}\right)^n &= e^{in\varphi} && n \in \mathbb{Q} \\ e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} &= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\left|e^{i\varphi}\right| = 1$$
$$e^{i2k\pi} = 1 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Beweis: (Sei im folgenden stets $k \in \mathbb{Z}$)

$$\left|e^{i\varphi}\right| = |\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

$$e^{i2k\pi} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 + i0 = 1$$

Beispiele werden auf den ÜB genug gerechnet, daher nur einige Bemerkungen

- Rechnen mit komplexen Zahlen geht im Prinzip genauso wie mit reellen Zahlen, wenn man beachtet, dass $i^2 = -1$
- Multiplikation bzw. das Bilden von Potenzen geht am einfachsten mit der Euler Form
- Seien $z = a + ib$ und $w = c + id$ zwei komplexe Zahlen. Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn gilt

  $$\begin{aligned} z = w \qquad &\Longleftrightarrow \qquad a = c \quad \wedge \quad b = d \\ &\Longleftrightarrow \qquad |z| = |w| \quad \wedge \quad \arg(z) = \arg(w) + 2k\pi \end{aligned}$$

  besonders wichtig ist zu beachten, dass die Euler Form periodisch in 2π ist und somit das Argument immer nur auf ein Vielfaches von 2π gleich sein muss.

11 Folgen

Im folgenden will ich einige zentrale Begriffe im Bezug auf Folgen wiederholen

11.1 Definition

Eine Folge ist eine Abbildung aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in eine Menge M (z.B. $\mathbb{R}$), die jeder natürlichen Zahl n ein Element $a_n \in M$ zuordnet.

$$\begin{aligned} a_n : \quad & \mathbb{N} \to M \subset \mathbb{R} \\ & n \to a_n \end{aligned}$$

Folgen kann man explizit oder rekursiv definieren
Beispiele:

- explizite Darstellung einer Nullfolge: $(a_n) = \frac{1}{n}$
- rekursive Darstellung der Fibonnaci Zahlen
  $a_{n+1} = a_n - a_{n-1} \qquad a_0 = 0 \quad a_1 = 1$

11.2 Beschränktheit

Eine Folge (a_n) ist (nach oben) beschränkt falls eine positive reelle Zahl K existiert mit

$$|a_n| \leq K \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Für reelle Folgen gilt

- (a_n) ist nach oben beschränkt : $(a_n) \leq K$
- (a_n) ist nach unten beschränkt : $(a_n) \geq K$

Ist die Folge sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt bezeichnet man sie einfach nur als beschränkt. Ist dies nicht der Fall heißt die Folge unbeschränkt.

11.3 Monotonie

Für eine reelle Folge (a_n) gilt

- (a_n) ist monoton wachsend : $(a_{n+1}) \geq (a_n)$
- (a_n) ist monoton fallend : $(a_{n+1}) \leq (a_n)$

Besteht in den Ungleichungen keine Gleichheit so spricht man auch von **streng** monoton wachsend bzw. fallend. Rechnerisch lässt sich das oft so zeigen

1. monoton wachsend
$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$
2. monoton fallend
$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

11.4 Konvergenz

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jeder Zahl $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Eine Folge die einen Grenzwert hat nennt man konvergent, ansonsten heißt sie divergent.
Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a schreibt man:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Bemerkung:
Sehr oft muss man um Konvergenz zu beweisen gar nicht auf die Definition zurückgreifen. Manchmal genügt der Einsatz einiger algebraischer Tricks

- Kürzen mit der höchsten Potenz von n in Brüchen
- Geschicktes erweitern zu Binomen
- Ausnutzen von geometrischer Summe, arithmetischer Summe oder dem binomischen Lehrsatz

11.4.1 Nützliche Grenzwerte

Sei $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \qquad a \in \mathbb{R} \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} q^n &= 0 \qquad |q| < 1 \\ \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n &= e \end{aligned}$$

11.4.2 Eindeutigkeit

Eine Folge kann natürlich nur einen Grenzwert a haben, d.h.

$$(a_n) \text{ ist konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Der Grenzwert a ist eindeutig}$$

11.4.3 Monotoniekriterium

Jede beschränkte und monotone Folge reeller Zahlen ist konvergent

11.4.4 Einschließungstheorem (Sandwich Lemma)

Seien a_n, b_n, c_n reelle Folgen und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

Dann kann man zeigen

$$a_n \le c_n \le b_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} c_n \le \lim_{n\to\infty} b_n \quad \Leftrightarrow \quad a \le \lim_{n\to\infty} c_n \le a$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

Beispiel:
Sei $c_n = \sqrt[n]{5^n + 6^n}$. Nun lässt sich abschätzen

$$6 = \sqrt[n]{6^n} \le c_n \le \sqrt[n]{6^n + 6^n} = 6 \cdot \sqrt[n]{2}$$

Machen wir den Grenzübergang $n \to \infty$ so folgt

$$6 \le \lim_{n\to\infty} c_n \le 6$$

Der Grenzwert von c_n muss also 6 sein.

11.5 Teilfolgen

Die formale Definition der Teilfolge ist:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

Man nennt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge.
Eine Teilfolge (a_{n_k}) einer Folge a_n erhält man also wenn man nur bestimmte Folgeglieder von (a_n) beachtet.

Beispiel:
sei $(a_n) = (-1)^n$, diese Folge hat nur die Elemente 1 (für n gerade) und -1 (für n ungerade)
Betrachten wir dazu die Folgen in $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n_k &= 0, 2, 4, 6\cdots \qquad \text{d.h. } n_k = 2k \qquad k \in \mathbb{N} \\ n_l &= 1, 3, 5, 7\cdots \qquad \text{d.h. } n_l = 2l+1 \qquad l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Die Teilfolgen, die wir damit erhalten sind

$$(a_{n_k}) = 1 \qquad \text{und} \qquad (a_{n_l}) = -1$$

Ist eine Teilfolge (a_{n_k}) konvergent so heißt ihr Grenzwert **Häufungswert**(HW)

$$a_n \quad \text{hat einen HW H} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \quad \text{Teilfolge} \quad a_{n_k} \quad \text{mit} \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = H$$

11.6 Häufungswerte

Es gibt auch eine andere Definition für Häufungswerten ohne Teilfolgen explizit zu erwähnen.
Man nennt eine Zahl H Häufungswert der Folge a_n, falls für jedes $\epsilon > 0$ und unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|H - a_n| < \epsilon$$

Eine konvergente Folge hat also nur einen HW, nämlich den Grenzwert und jede Teilfolge konvergiert gegen ihn.
Hat eine Folge dagegen mehrere Häufungswerte, so ist sie divergent.

11.7 Satz von Boltzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen HW.

11.8 Cauchyfolge

(a_n) ist eine Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n > n_0$ gilt

$$|a_m - a_n| < \epsilon$$

11.9 Rekursive Folgen

Konvergenz zeigt man bei rekursiv definierten Folgen immer indem man

1. Monotonie
2. Beschränktheit

zeigt.

Dazu schreibt man sich ein paar Folgeglieder explizit auf und stellt Vermutungen über die Monotonie und mögliche Schranken an

Diese Behauptungen zeigt man dann mit Vollständiger Induktion und den Definitionen zu Monotonie und Beschränktheit. Für die Berechnung des Induktionsschritts benutzt man die rekursive Definition der Folge.

Um schließlich den Grenzwert der Folge zu bestimmen macht man die Annahme das für $n \to \infty$ gilt $a_{n+1} = a_n \equiv c$. Da a_{n+1} Teilfolge von einer konvergenten Folge a_n ist, muss diese gegen den gleichen Wert wie a_n konvergieren (bei konvergenten Folgen konvergieren alle Teilfolgen gegen den Grenzwert der Folge).

Man erhält eine algebraische Gleichung, die man für c auflösen kann.

12 Konvergenz von Reihen

Zunächst sollten wir uns verdeutlichen was man unter einer Reihe versteht. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ so nennt man den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Reihe. Diese ist als Grenzwert einer Folge von Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ zu verstehen, d.h.

$$\begin{aligned}
(s_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (s_1, s_2, \cdots s_N \cdots) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \cdots \sum_{k=1}^{N} a_k \cdots \right) \\
\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k
\end{aligned}$$

Eine Reihe $\sum_{k}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Eine komplexe Reihe konvergiert, wenn ihr Realteil und Imaginärteil konvergieren

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} Re(a_k) + i \sum_{k=1}^{\infty} Im(a_k)$$

Weiterhin sprechen wir von **absoluter Konvergenz**, wenn für eine Reihe $\sum_k^\infty a_k$ gilt:

$$\sum_k^\infty |a_k| \quad \text{konvergiert}$$

Die absolute Konvergenz ist ein stärkerer Begriff als die Konvergenz, es gilt also:

$$\textbf{Absolute Konvergenz} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \quad \textbf{Konvergenz}$$

Ein Beispiel für eine Reihe die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert ist:

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{1}{k}$$

Denn sie konvergiert über das später besprochene Leibnizkriterium, jedoch konvergiert sie nicht absolut, denn:

$$\sum_{k=1}^\infty \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$$

konvergiert nicht (siehe Vorlesung).

12.1 Konvergenzkriterien

Es gibt u.a. folgende wichtige Konvergenzkriterien:

12.1.1 Notwendiges Kriterium

Es gilt:

$$\sum_k^\infty a_k \text{ konvergent} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \quad a_k \text{ Nullfolge}$$

wenn a_k also keine Nullfolge ist, so ist die Reihe auf keinen Fall konvergent.

12.1.2 Leibnizkriterium

Ist a_k eine monoton fallende reelle Nullfolge, so ist die alternierende Reihe:

$$\sum_k^\infty (-1)^k a_k$$

konvergent.

<u>Bsp.:</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$$

ist konvergent, jedoch nicht absolut konvergent (siehe oben).

12.1.3 Majorantenkriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.
Gilt $|a_n| \leq b_n$ für alle n ab einem bestimmten Wert $n_0 \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent folgt

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

Bsp.:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ absolut konvergent, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent und:

$$\left|\frac{1}{k^3}\right| \leq \frac{1}{k^2}$$

12.1.4 Minorantenkriterium

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen und $n_0 \in \mathbb{N}$
Falls $a_n \geq b_n \geq 0$ für $n \geq n_0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent ist, folgt

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

12.1.5 Wichtige Reihen

Für die oben genannten Vergleichskriterien benötigt man natürlich geeignete Reihen zum vergleichen. Hier liste ich mal die wichtigsten auf

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \begin{cases} \text{konvergent für } 0 \leq q < 1 \\ \text{divergent für } q \geq 1 \end{cases} \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = \begin{cases} \text{konvergent für } a > 1 \\ \text{divergent für } a \leq 1 \end{cases}$$

12.1.6 Quotientenkriterium

sei a_n eine Folge und $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ für $a_n \neq 0$ so gilt:

$$\sum_{k}^{\infty} a_k = \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \limsup_{n\to\infty} c_n < 1 \\ \text{divergent} & \liminf_{n\to\infty} c_n > 1 \\ \text{keine Aussage} & \liminf_{n\to\infty} c_n \leq 1 \leq \limsup_{n\to\infty} c_n \end{cases}$$

Beweis:

Sei $q < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \;\; \forall n \geq n_0$
Somit

$$|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n| \quad \text{für alle n} \geq n_0$$

also gilt insbesondere

$$|a_{n_0+1}| \leq q \cdot |a_{n_0}| \tag{20}$$

$$\Rightarrow |a_{n_0+k}| \leq q^k \cdot |a_{n_0}| \qquad k \in \mathbb{N} \tag{21}$$

Den letzten Schritt zeigen wir mit vollständiger Induktion

IA: k=1 $|a_{n_0+1}| \leq q \cdot |a_{n_0}|$ wahr (siehe (1))
IV $|a_{n_0+k}| \leq q^k \cdot |a_{n_0}|$ für ein $k \in \mathbb{N}$)
IS: $k \to k+1$ $\quad |a_{n_0+k+1}| = \frac{|a_{n_0+k+1}|}{|a_{n_0+k}|} |a_{n_0+k}| \leq q \cdot |a_{n_0+k}| \leq q^k \, |a_{n_0}|$ q.e.d

Dabei haben wir im letzten Schritt bei der ersten Abschätzung die Voraussetzung $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ und bei der zweiten Abschätzung die IV benutzt.

Da nach Voraussetzung $q < 1$ konvergiert $|a_{n_0}| \sum_{k=1}^{\infty} q^k$ (geometrische Reihe), da dies aber nach (2) eine Majorante zu $|a_{n_0+k}|$ ist muss auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_0+k}|$ konvergieren.

Somit konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, da endlich viele „Anfangsglieder" nicht das Konvergenzverhalten einer Reihe beeinflussen. Q.e.d.

12.2 Wurzelkriterium

Existiert:

$$q \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

so gilt:

$$\sum_{k}^{\infty} a_k = \begin{cases} \text{absolut konvergent} & q < 1 \\ \text{divergent} & q > 1 \\ \text{keine Aussage} & q = 1 \end{cases}$$

<u>Motivation</u>

Die geometrische Reihe:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} q^k = \lim_{N\to\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \stackrel{|q|<1}{=} \frac{1}{1-q}$$

konvergiert offensichtlich nur für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| > 1$ (für $q = 1$ ist keine Aussage möglich, da hier die geometrische Summenformel nicht gilt).

Betrachte nun:

$$\sum_k^{\infty} |a_k| = \sum_k^{\infty} \Bigg(\underbrace{\sqrt[k]{|a_k|}}_{\overset{\text{def}}{=} q} \Bigg)^k$$

Wenn nun offensichtlich fast alle $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ sind, so konvergiert diese Reihe wegen der Abschätzung durch die geometrische Reihe absolut.

13 Cauchy Produkt von Reihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ zwei absolut konvergente Reihen (a,b, sind ihre Grenzwerte). Das Produkt der zwei Reihen konvergiert dann auch absolut und ist gegeben durch

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}\right) = a \cdot b \tag{22}$$

Bemerkung:

Es genügt auch zu fordern, dass eine der Reihen im Cauchy Produkt absolut konvergent ist und die andere nur konvergent. Das Produkt existiert auch in diesem Fall ist aber i.A. nicht absolut konvergent.

14 Potenzreihen

Sei $z \in \mathbb{C}$. Einen Ausdruck der Form

$$\sum_k^{\infty} a_k \, (z - z_0)^k$$

nennt man Potenzreihe und $z_0 \in \mathbb{C}$ bezeichnet man als den Entwicklungspunkt. Durch eine Variablentransformation $z - z_0 \to z$ geht dies über in

$$\sum_k^{\infty} a_k z^k$$

Für ein festes z ist dies eine normale Reihe mit neuen Koeffizienten b_k

$$\sum_k^{\infty} a_k z^k =: \sum_k^{\infty} b_k$$

Uns interessiert nun für welche Werte von z diese Reihe konvergiert bzw. divergiert. Dies können wir mit dem Quotienten- oder Wurzelkriterium für Reihen feststellen.

Einsetzen in das Quotientenkriterium:
(Achtung: im Kriterium für Reihen steht der limsup, für Potenzreihen muss man

allerdings die Existenz des Grenzwerts fordern, d.h. es muss der Limes dastehen)

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}z^{k+1}}{a_k z^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||z| < 1\\ \Leftrightarrow \quad |z| &< \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} =: r \qquad \text{Konvergenzradius}\end{aligned}$$

Einsetzen in das Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|b_k|} &= \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k z^k|} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}\,|z| < 1\\ \Leftrightarrow \quad |z| &< \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} =: r\end{aligned}$$

Wir haben dabei den Konvergenzradius r definiert. Es gilt

$$\begin{aligned}|z| < r &\quad \text{Konvergenz}\\ |z| > r &\quad \text{Divergenz}\end{aligned}$$

Am Ende muss man nun noch $|z| = r$ einzeln betrachten und berechnen ob hier Konvergenz vorliegt, da hier keine Aussage aus dem Quotienten- oder Wurzelkriterium folgt. Für $|z| = r$ haben wir dabei wieder eine normale Reihe und können somit die bekannten Mittel zum Überprüfen von Konvergenz anwenden.

Fazit: Man kann Potenzreihen bei der Überprüfung auf Konvergenz wie normale Reihen benutzen.

15 Identitätssatz für Potenzreihen

Zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius $r > 0$ sind gleich, d.h. es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

für alle $|x - x_0| < r$, wenn die Koeffizientenfolgen gleich sind

$$a_n = b_n \qquad \forall n$$

Eigentlich handelt es sich hier also nur um einen Koeffizientenvergleich. Machen wir uns das anhand eines Beispiels klar

15.1 Reihendarstellung des Tangens

Wir wollen die ersten 4 Koeffizienten der Reihendarstellung von $\tan x$ um $x_0 = 0$ berechnen. Wir suchen also Zahlen a_n für die gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Setzen wir nun die bekannten Reihenentwicklungen für Sinus und Cosinus ein erhalten wir

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5) &= (1 + \tfrac{1}{2!}x^2 + O(x^4))(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...) \\ &= a_0 + a_1 x + (a_2 + \tfrac{1}{2}a_0)x^2 + (a_3 + \tfrac{1}{2}a_1)x^3 + O(x^4) \end{aligned}$$

Da die beiden Reihen gleich sein sollen muss vor den jeweiligen Potenzen von x immer die gleiche Zahl stehen; machen wir also einen Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{lrl} x^0: & 0 = a_0 & \\ x^1: & 1 = a_1 & \\ x^2: & 0 = \frac{1}{2}a_0 + a_2 & \Rightarrow a_2 = 0 \\ x^3: & -\frac{1}{6} = \frac{1}{2}a_1 + a_3 & \Rightarrow a_3 = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Unsere Reihenentwicklung lautet also $\tan x \approx x - \frac{2}{3}x^3 + ...$

16 Reihenentwicklung von Funktionen

16.1 Taylor Reihe

Wir wollen uns zunächst überlegen, wie man auf die Reihendarstellung von Funktionen kommt. Dazu führen wir einige verkürzende Schreibweisen ein. Sei

$$\begin{array}{rl} f^{(n)} := \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) & \text{n-te Ableitung von f} \\ f \in C^{\infty} & \text{f ist unendlich fach ableitbar} \end{array}$$

wobei C^k der Raum der k-fach differenzierbaren Funktionen war.

Wie gesagt wollen wir nun f als Potenzreihe darstellen, d.h

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - x_0\right)^k$$

Der Einfachheit halber entwickeln wir die Funktion um $x_0 = 0$ so, dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots$$

die Unbekannten in dieser Gleichung sind die Koeffizienten a_k, die wir nun bestimmen müssen. Dazu bilden wir einige Ableitungen von (1):

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ x^k = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots \\
f^{(1)}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \ x^{k-1} = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 \cdots \\
f^{(2)}(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot a_k \ x^{k-2} = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot x + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \cdot x^2 + \cdots \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) \cdot a_k \ x^{k-n} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)\,!} \cdot a_k \ x^{k-n} \\
&= n! \cdot a_n + (n+1)\,! a_{n+1} \cdot x + \cdots
\end{aligned}
$$

Man sieht also sofort, dass wir die Koeffizienten a_n erhalten indem wir die n-te Ableitung an der Stelle $x = 0$, also allgemein an der Stelle um die wir entwickeln, auswertet. Z.B. $a_0 = f(0), a_1 = f^{(1)}(0), \cdots$. Wir erhalten also allgemein

$$
f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}
$$

Und somit als Reihendarstellung die sogenannte Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt x_0

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \left(x - x_0\right)^k
$$

Beispiel

Wir wollen die Reihendarstellung der e-Funktion um $x_0 = 0$ bestimmen. Dazu benötigen wir zunächst die n-te Ableitung der Funktion ausgewertet an der Entwicklungsstelle

$$
f^{(n)}(x) = e^x \qquad \Rightarrow \qquad f^{(n)}(0) = e^0 = 1
$$

Somit erhalten wir die Koeffizienten $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$ und die Reihendarstellung

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k
$$

16.2 Einige wichtige Reihendarstellungen

Kann man eine Funktion in eine Potenzreihe entwickeln, so nennt man die Funktion analytisch. Die wichtigsten Reihen (mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und

Konvergenzradius $r = \infty$) sind:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{Konvergenzradius r=1}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\ x^k \quad = \quad 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ x^{2k+1} \quad = \quad x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\ x^{2k} \quad = \quad 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\ x^{2k+1} \quad = \quad x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\ x^{2k} \quad = \quad 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

Bemerkungen :

- im Inneren des Konvergenzkreises konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig gegen die Funktion, d.h. dass die Funktion, die durch die Potenzreihe dargestellt wird ebenfalls stetig ist.
- Die Reihendarstellung von Funktionen ist oft hilfreich zur Berechnung von Grenzwerten.
- Um die Reihenentwicklung von Funktionen zu bestimmen braucht man oft gar nicht die Taylorentwicklung sondern kann die bekannten Reihen oben benutzen.