Ergänzung zur HMI ÜB Nr.10

Patrik Hlobil Niko Kainaris

Dieses Dokument erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit. Es stellt keine Vorlesungszusammenfassung dar, sondern soll euch lediglich bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben helfen

1 Satz von Taylor

Sei $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und f eine (n+1)-mal differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein t zwischen x und x_0 mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Dabei nennt man

$$T_n(f,x_0)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

das **Taylorpolynom** vom Grad n der Funktion f an der Stelle x_0 und

$$R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

das **Restglied nach Lagrange**.

Wir wollen uns nun klar machen, wie man auf diesen Ausdruck kommen kann. Betrachten wir den Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \tag{1}$$

Berechnen wir das Integral auf der rechten Seite nun durch Partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} f'(t)\cdot 1\,dt &\overset{\text{PI}}{=} f'(t)t\big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot t\,dt \\
&= f'(x)x - f'(x_0)x_0 - \int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot t\,dt \\
&= f'(x)x - f'(x_0)x + f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 - \int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot t\,dt \\
&\overset{\text{HS}}{=} x\cdot \int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot t\,dt + f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 - \int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot t\,dt \\
&= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot(x-t)\,dt
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im dritten Schritt mit einer 0 in der Form $-f'(x_0)x + f'(x_0)x$ erweitert und später den HS benutzt,d.h.

$$f'(x)x - f'(x_0)x = x\,(f'(x) - f'(x_0)) \overset{\text{HS}}{=} x \cdot \int_{x_0}^{x} f''(t) \cdot t\,dt$$

Nochmalige PI liefert

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2\,dt + \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} f^{(3)}(t) \cdot (x-t)^2\,dt \quad (2)$$

Dies können wir nun beliebig oft wiederholen. Nehmen wir an wir haben (2) n-mal partiell integriert und setzen diesen Ausdruck in (1) ein. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n \\ &+ \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n dt \\ =& \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + R_n(x,x_0) \end{aligned}$$

Das Restglied, dass im Moment noch in Integralform ist können wir noch weiter durch den MWS der Integralrechnung umformen. Zur Erinnerung dieser lautete

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \qquad \text{mit } c \in [a,b]$$

somit

$$\begin{aligned} R_n(x,x_0) =& \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n dt \\ =& \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n dt \\ =& \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\left(-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\right)\Big|_{x_0}^{x} \\ =& \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

Wir haben also wie gewünscht einen Ausdruck gefunden mit dem wir das Restglied, das übrig bleibt wenn wir die Taylorreihe nach n Gliedern abbrechen, bestimmen können.

1.1 Bemerkungen

- Im Limes $n \to \infty$ geht das Taylorpolynom mit Restglied in die Taylorreihe über, wenn $R_{n+1}(x,x_0) \to 0$ für $n \to \infty$. Die Entwicklung einer Funktion f in eine Taylorreihe ist also nur legitim, wenn das Restglied der Reihe im Limes $n \to \infty$ verschwindet.

- Oft ist es in der Praxis nicht nötig eine Taylorreihe nach obigem Schema zu entwickeln. Bei Kompositionen von Funktionen ist es oft einfacher die Reihenentwicklungen der einzelnen Funkionen einzusetzen und somit das Ergebnis zu bestimmen
  Beispiel : Taylorpolynom 2.Grades von $e^{-x}\sin(2x)$ um $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} e^{-x}\sin(2x) =& \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \cdots\right)(2x + \cdots) \\ =& 2x - 2x^2 + \cdots \end{aligned}$$

- Mit Hilfe der Taylorreihe einer Funktion f gibt es eine Möglichkeit die n-te Ableitung dieser Funktion $f^{(n)}$ explizit zu bestimmen. Für die Koeffizienten der Reihe gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!$$