# Ergänzung zur HMI ÜB Nr.11

Patrik Hlobil    Niko Kainaris

*Dieses Dokument erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit. Es stellt keine Vorlesungszusammenfassung dar, sondern soll euch lediglich bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben helfen*

## 1 Grundlagen der Integralrechnung

In der Vorlesung habt ihr sicherlich Riemann-Integrale besprochen. Hier eine kurze Zusammenfassung:
Sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall [a,b]. Dieses Intervall zerlegt man nun in n , also endlich viele, Teilintervalle $I_1 = [a, x_1], ..., I_k = [x_{k-1}, x_k], ..., I_n = [x_{n-1}, b]$.
Desweiteren wählt man in jedem Teilintervall jeweils den größten Funktionswert $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$ und den kleinsten Funktionswert $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$. Sei $\xi_k \in I_k$ so ergibt sich als Näherung des Flächeninhalts unter dem Graphen der Funktion f die Riemannsche Obersumme O, Untersumme U und Zwischensumme Z.

$$\begin{aligned} O &= \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) \\ U &= \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \\ Z &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Ist die Funktion nun Riemannintegrabel, so geht im Grenzwert $n \to \infty$ die Untersumme von unten und die Obersumme von oben gegen die Zwischensumme. Diese kann man dann schreiben als

$$\lim_{n \to \infty} Z = \int_a^b f(x)dx$$

Man kann sich diese Definition auch bildlich gut vorstellen. Die Fläche unter der Kurve wird gerade durch die Fläche von n Rechtecken angenähert. Lässt man nun n gegen $\infty$ gehen kann der Flächeninhalt unter der Kurve durch den Flächeninhalt der Rechtecke approximiert werden.

## 2 Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Die Hauptsätze fassen die wichtigsten Eigenschaften des Integrierens zusammen und zeigen wie man ein Integral berechnen kann

## 2.1 1.Hauptsatz (1.HS)

Sei die Funktion f im Intervall $[a, b]$ beschränkt und stetig, dann gilt

(1) f auf $[a, b]$ integrierbar

(2) Die durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

definierte Funktion F ist in $[a, b]$ differenzierbar und stetig, und es gilt

$$F'(x) := \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Bemerkung:
Jede Funktion F mit $F' = f$ heißt Stammfunktion von f. Stammfunktionen sind also immer bis auf eine Konstante bestimmt.

## 2.2 2.Hauptsatz (2.HS)

Sei $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf [a,b] stetige und auf (a,b) stetig differenzierbare Funktion und $F'$ integrierbar, dann gilt

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b$$

Bemerkung:
Der 2.HS ist lediglich eine andere Formulierung des 1.HS. Diese Formulierung ist aber zur expliziten Berechnung eines Integrals besser geeignet.

## 2.3 Partielle Integration (PI)

Diese kann man aus der Produktregel herleiten, indem man einfach beide Seiten der Gleichung integriert

$$\begin{aligned} (f \cdot g)' &= f'g + fg' \qquad \mid \textstyle\int_a^b \\ f \cdot g|_a^b &= \textstyle\int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g' \end{aligned}$$

Stellen wir die Gleichung noch um erhalten wir die Regel für die PI

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$$

<u>Beispiel</u> :

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x| - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C$$

Hier war nun $f'(x) = 1, \quad g(x) = \ln x$.

## 2.4 Substitutionsmethode

Hier nutzen wir die Kettenregel und integrieren die Gleichung. Sei $F(g(x))$ die Stammfunktion der Funktion $f(g(x))$ so gilt :

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Nutzen wir nun den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f((g(x)) \cdot g'(x)dx &\overset{2.HS}{=} F(g(x))|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &\overset{1.HS}{=} \textstyle\int_t^{g(b)} f(u)du - \int_t^{g(a)} f(u)du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du\end{aligned}$$

<u>Beispiel</u>: $\int_a^b x \cdot e^{x^2} dx$

$$\begin{aligned} u = x^2 \quad &\Rightarrow \quad du = 2xdx \\ \Rightarrow \int_a^b x \cdot e^{x^2} dx \quad &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{a^2}^{b^2} e^u du \quad = \frac{1}{2}(e^{b^2} - e^{a^2})\end{aligned}$$

## 2.5 Logarithmische Integration

Aus der Kettenregel erhalten wir $\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ und somit folgt durch Integration

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

Dabei ist C eine beliebige Integrationskonstante.
<u>Beispiel</u>:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin x - 5}dx = \ln(|\sin x - 5|) + C$$