Ergänzung zur HMI ÜB Nr.12

Patrik Hlobil Niko Kainaris

Dieses Dokument erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit. Es stellt keine Vorlesungszusammenfassung dar, sondern soll euch lediglich bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben helfen

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Definitionen

Eine lineare DGL **n-ter Ordnung** hat die Gestalt

$$\alpha_n(x)\, y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_1(x)\, y'(x) + \alpha_0(x)\, y(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

für alle x in einem Intervall I mit Funktionen $\alpha_j : I \to \mathbb{C}$, $j \in \{0, \cdots n\}$ und $f : I \to \mathbb{C}$. Ist f(x)=0 nennt man die DGL **homogen** ansonsten **inhomogen**. Die allgemeine Lösung erhält man als Linearkombination der homogenen Lösung y_h der homogenen DGL und einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen DGL.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

2 Differentialgleichungen 1.Ordnung

2.1 Separable DGL (DGL mit getrennten Variablen)

Wenn eine Gleichung in der Form

$$A(x)\, dx + B(y)\, dy = 0$$

geschrieben werden kann, so nennt man sie **separabel** und man erhält die Lösung direkt durch integrieren.
Beispiel:

$$\begin{aligned}
& y' = \frac{dy}{dx} = y^2 x \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{dy}{y^2} = x\, dx \qquad \Big| \int \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \qquad , \ C \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow \quad & y(x) = \frac{2}{c - x^2} \qquad , \ c \equiv \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

2.2 Variation der Konstanten

Haben wir eine inhomogene DGL 1.Ordnung so lösen wir zunächst die homogene Gleichung mit der Lösung $y_h(x)$ und machen dann für die partikuläre Lösung einen Ansatz mit veränderlicher Konstante $y_p(x) = C(x)y_h(x)$
Beispiel: $y' = y + x^2$

- Homogene Gleichung : $y_h' - y_h = 0$
  Die Lösung kann man direkt ablesen $y_h(x) = Ce^x$ mit $C \in \mathbb{R}$
- Inhomogene Gleichung : $y' - y = x^2$ Wir machen den Ansatz:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= C(x)e^x \\
y_p'(x) &= C'(x)e^x + C(x)e^x
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = x^2$$
$$C'(x) = x^2 e^{-x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\left(x^2+2x+2\right)e^{-x} + D \qquad , \; D \in \mathbb{R}$$

Im letzten Schritt wurde über x integriert (PI). Da wir nur eine partikuläre Lösung brauchen, können wir D=0 wählen. Somit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^x - \left(x^2+2x+2\right)e^{-x} \qquad , \; C \in \mathbb{R}$$

2.3 Exakte DGL

Eine Gleichung der Form

$$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

lässt sich sofort integrieren, wenn die rechte Seite das totale Differential einer Funktion u(x,y)=const. ist, d.h.

$$\frac{du(x,y(x))}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial x}dx = 0 \tag{3}$$

Eine solche Gleichung nennt man **exakt**. Eine hinreichende und notwendige Bedingung für Exaktheit ist

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

Bemerkung:

- Die Bedingung ist eine Folge des Satzes von Schwarz. Aus (3) und (1)

$$A(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad B(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

  und der Satz von Schwarz besagt

$$\frac{\partial u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

Beispiel:

$$(x+y)\,dx + x\,dy = 0$$

Überprüfen wir zunächst auf Exaktheit. Mit $A(x,y) = x+y$ und $B(x,y) = x$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 1 = \frac{\partial B}{\partial x}$$

Wir machen den Ansatz $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x = A$ und $u_y = B$ und integrieren diesen

$$u(x,y) = \int dx A(x,y) + C(y) = \frac{1}{2}x^2 + yx + C(y) \qquad | \; \frac{d}{dy}$$
$$u_y(x,y) = x + C'(y) \stackrel{!}{=} B(x,y) = x \quad \Rightarrow C'(y) = 0 \quad \Rightarrow \; \text{wähle } C(y) = 0$$

Als Lösung der DGL erhalten wir somit

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + yx = C \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{C}{x} \qquad , \; C \in \mathbb{R}$$

2.3.1 Integrierender Faktor

Manchmal lässt sich eine Funktion $\lambda(x,y)$ finden, so dass

$$\lambda(x,y) \cdot (A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy)$$

ein exaktes Differential ist, selbst wenn $A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ keines ist. Eine solche Funktion λ nennt man **integrierender Faktor**.
Für eine DGL 1.Ordnung existieren solche integrierenden Faktoren immer, es gibt aber i.A. keine generelle Regel diese zu finden. Eine Ausnahme ist, wenn sich die DGL in die Form

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x) \tag{4}$$

bringen lässt.

Nun suchen wir $\lambda(x)$ so, dass

$$\lambda(x)\,[dy + f(x)ydx] = \lambda(x)g(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\lambda(x)}_{=B(x,y)}\, dy + \underbrace{(\lambda(x)f(x)y - \lambda(x)g(x))}_{=A(x,y)}\, dx = 0$$

exakt ist. Die Bedingung lautet also

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} = \lambda(x)f(x) &\overset{!}{=} \frac{\partial B}{\partial x} = \lambda'(x) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{d\lambda}{\lambda} &= f(x)dx \\ \Leftrightarrow \quad \lambda(x) &= \exp\,(\int dx\, f(x)) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir (4) mit λ so erhalten wir die exakte DGL

$$\lambda(x)y' + \lambda(x)f(x)y = \lambda(x)g(x)$$

Wegen $\lambda'(x) = \lambda(x)f(x)$ ist die Stammfunktion der rechten Seite λy. Check:

$$(\lambda y)' = \lambda' y + y'\lambda = \lambda(x)f(x)y + y'\lambda(x)$$

Somit erhalten wir durch Integration die Lösung der DGL

$$\lambda(x)y(x) = \int dx\, \lambda(x)g(x)$$

Beispiel:

$$xy' + (1+x)y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad y' + \left(\frac{1+x}{x}\right) y = \frac{e^x}{x}$$

1. Berechne den integrierenden Faktor

$$\lambda(x) = \exp\left(\int dx\, \frac{1+x}{x}\right) = \exp\,(\ln x + x) = xe^x$$

2. Multipliziere die DGL mit λ. Das Resultat ist eine exakte DGL

$$\begin{aligned} xe^x \left[y' + \left(\frac{1+x}{x}\right) y\right] &= xe^x \frac{e^x}{x} \\ \Leftrightarrow \quad xe^x y' + ye^x + xe^x y &= e^{2x} \end{aligned}$$

3. Integrieren

$$\begin{aligned} xe^x y &= \int dx\, e^{2x} = \frac{1}{2}\int du\, e^u = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{2x} + C \qquad , \; C \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad y(x) &= \frac{e^x}{2x} + \frac{C}{x}e^{-x} \end{aligned}$$

2.4 Substitutionen

Man kann eine DGL oft durch einen Variablenwechsel vereinfachen. Als Beispiel zeige ich hier die **Bernoulli DGL**

$$y' + f(x)y = g(x)y^n \qquad n \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Dies wird zu einer linearen DGL 1.Ordnung, wenn wir folgende Substitution vornehmen

$$\begin{aligned} v(x) &= y^{n-1}(x) \\ v'(x) &= y'(n-1)y^{n-2}(x) \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{v'(x)}{n-1}y^{2-n}(x) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir (5) mit y^{-n} und setzen dann die Substitution ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y'y^{-n} + f(x)y^{1-n} &= g(x) \\ \Rightarrow \quad \frac{v'(x)}{1-n} + f(x)v(x) &= g(x) \qquad , \; n \neq 1 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die lineare DGL die wir durch die Substitution erhalten lässt sich nun mit den bisherigen Methoden behandeln
- Für n=1 funktioniert obige Substitution nicht. Dann wäre die ursprüngliche DGL aber sowieso separabel und einfach durch Trennung der Variablen lösbar

3 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = f(x) \tag{6}$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{0, \cdots n\}$.

- Für die homogene Gleichung machen wir den Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$
Damit erhalten wir eine algebraische Gleichung für λ

$$\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

Diese Gleichung hat n (komplexe) Nullstellen λ_i und die homogene Lösung ist die Linearkombination der linear unabhängigen Lösungsfunktionen $\{e^{\lambda_i x}\}$.

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \qquad , \ c_i \in \mathbb{C}$$

Falls zwei Nullstellen gleich sind z.B. $\lambda_1 = \lambda_2$ so haben wir nur (n-1) l.u. Basisfunktionen und müssen noch eine zusätzliche konstruieren.
Betrachte einen Grenzwertprozess bei dem sich λ_1 λ_2 annähert. Als Linearkombination zweier Lösungen ist auch

$$\frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

eine Lösung der linearen DGL. Im Limes $\lambda_1 \to \lambda_2$ wird daraus

$$\lim_{\lambda_1 \to \lambda_2} \frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda x}\Big|_{\lambda_1 = \lambda_2} = x e^{\lambda_1 x}$$

Dies ist unsere zusätzliche Lösung. Gibt es drei gleiche Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ so sind die l.u. Basisfunktionen

$$e^{\lambda_1 x} \quad , \qquad x e^{\lambda_1 x} \quad , \qquad x^2 e^{\lambda_1 x}$$

- Lösung der inhomogenen Gleichung:
Wir nehmen an die Inhomogenität f(x) hat nur endlich viele linear unabhängige Ableitungen (z.B. x^m, e^{ax}, $\sin(kx)$ etc.).
Beispiel:

$$f(x) = \sin(kx) \qquad f'(x) = k\cos(kx) \qquad f''(x) = -k^2 \sin(kx)$$

Somit hat $\sin(kx)$ nur eine linear unabhängige Ableitung da $f''(x)$ schon wieder als Linearkombination von f(x) dargestellt werden kann usw.
Dann bietet sich die Methode der **unbestimmten Koeffizienten** an. Wir wählen hierbei eine Linearkombination von f(x) und all seiner linear unabhängigen Ableitungen als Ansatz für $y_p(x)$ und bestimmen die Koeffizienten durch die Forderung, dass $y_p(x)$ die DGL erfüllt.

Beispiel: $y'' + 3y' + 2y = e^x$

(i) Homogene Gleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$. Wähle den Ansatz $y = e^{\lambda x}$. Einsetzen liefert

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -2$$

Somit erhalten wir für die homogene Lösung $y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ mit Konstanten reellen c_i.

(ii) Inhomogene Gleichung : Ansatz $y_p = Ae^x$. Einsetzen liefert

$$A + 3A + 2A = 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{6}$$

Also erhalten wir $y_p(x) = \frac{1}{6}e^x$

Insgesamt $y(x) = \frac{1}{6}e^x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$