Lösungshilfe zu HMI ÜB 14

Patrik Hlobil   Niko Kainaris

Dieses Dokument erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit. Es stellt keine Vorlesungszusammenfassung dar, sondern soll euch lediglich bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben helfen

Lineare Algebra

Hier liste ich nochmal einige grundlegende Definitionen der linearen Algebra. Ihr braucht das nicht alles auswendig zu wissen, aber es ist nützlich die Begriffe einordnen zu können.

1 Gruppe

Unter einer inneren Verknüpfung "$\cdot$" auf einer Menge M versteht man eine Abbildung $f : M \times M \rightarrow M$. Sie ordnet jedem Paar (a,b) von Elementen aus M ein Element f(a,b) aus M zu.

Eine Menge M mit einer inneren Verknüpfung "$\cdot$", die zwei Elemente a, b wieder auf ein Element $c = a \cdot b \in G$ abbildet, heißt **Gruppe**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind. Bzw. etwas mathematischer

Sei M eine Menge, $M \neq \emptyset$ und

$$\begin{aligned} \cdot : M \times M &\rightarrow M \\ \langle a, b \rangle &\rightarrow a \cdot b \end{aligned}$$

eine Abbildung.

Das Dupel $\langle M, \cdot \rangle$ heißt Gruppe $\Leftrightarrow$

1. Die Verknüpfung ist assoziativ, d.h. es gilt
   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2. Es existiert ein neutrales Element $e \in M$ (bei der Addition ist dies "0", bei der Multiplikation "1") mit
   $e \cdot a = a \cdot e = e$ für alle $a \in M$

3. Zu jedem $a \in M$ gibt es ein inverses Element $a^{-1} \in M$, so dass
   $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Ist die Verknüpfung zusätzlich noch kommutativ $a \cdot b = b \cdot a$, so nennt man die Gruppe **abelsch**

Beispiele

(a) $\mathbb{Z}$ mit der Addition "+"

(b) $\mathbb{R}$ mit der Addition "+" und $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$ mit der Multiplikation "$\cdot$"

2 Körper

Sei M eine Menge mit mindestens zwei Elementen und sein

$$\begin{aligned} + : M \times M &\to M \\ \langle a, b \rangle &\to a + b \\ \cdot : M \times M &\to M \\ \langle a, b \rangle &\to a \cdot b \end{aligned}$$

Abbildungen.
Das Tripel $\langle M, +, \cdot \rangle$ heißt **kommutativer Körper** $\Leftrightarrow$

1. $\langle M, + \rangle$ ist kommutative Gruppe
   (das neutrale Element bezeichnet man mit 0)

2. $\langle M \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ ist kommutative Gruppe
   (neutrales Element 1)

3. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + a \cdot b$ (Distributivgesetz)

3 Vektorraum(VR)

Wir wollen nun allgemein das Konzept eines Vektorraums definieren. Sei K ein kommutativer Körper, $(\alpha, \beta \in K)$. Sei V eine nichtleere Menge, $(\vec{a}, \vec{b} \in V)$. Seien

$$+ : V \times V \to V \quad \langle a, b \rangle \to a + b \qquad \text{(Addition von Elementen aus V)}$$
$$\cdot : K \times V \to V \quad \langle \alpha, a \rangle \to \alpha a \qquad \text{(Multiplikation von Elementen aus V mit Elementen aus K)}$$

Abbildungen.
Das Quadrupel $\langle V, +, K, \cdot \rangle$ heißt **Vektorraum über K**, falls gilt:

I. $\langle V, + \rangle$ ist kommutative Gruppe

II. i) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

ii) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

iii) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

iv) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

Bemerkung:

- Bei K handelt es sich meist um die bekannten Skalarenkörper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
- Elemente eines Vektorraums nennt man **Vektoren**. Speziell heißt das neutrale Element $\vec{0}$ **Nullvektor**. Die Elemente aus $\mathbb{K}$ nennt man **Skalare**.

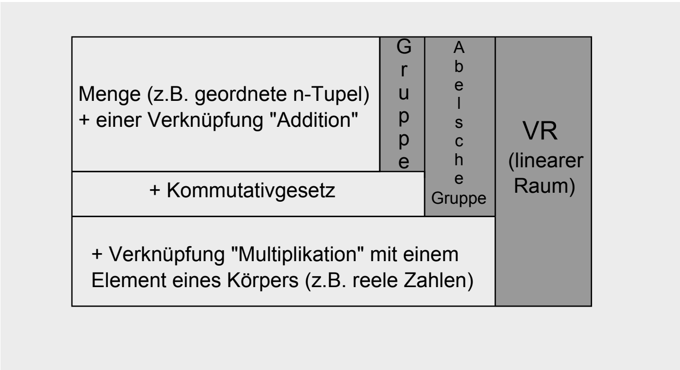

Abbildung 1: Zusammenhang zwischen den Definitionen einer Gruppe und eines Vektorraums

3.1 Untervektorraum

Eine Menge U heißt Unterraum eines Vektorraums V ($U \subset V$), wenn

(U1) das Nullelement in U liegt, U also auf jeden Fall nicht leer ist: $0 \in U$

(U2) mit $\vec{u}, \vec{w} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ auch $\vec{u} + \vec{w} \in U$ und $\lambda \cdot \vec{u} \in U$ ist

Bemerkung:

- Ein Unterraum U eines $\mathbb{K}$ Vektorraums V ist wieder ein $\mathbb{K}$ Vektorraum. Dies kann man sich zu nutze machen, wenn man beweisen soll, dass ein Raum U ein VR ist. Es genügt zu zeigen, dass U ein Untervektorraum eines größeren VR V ist und (U1) und (U2) gelten.
- Mit der Eigenschaft (U2) zeigt man, dass der Untervektorraum U mit den Verknüpfungen "+" und "·" wieder auf sich selbst abgebildet wird, man sagt er sei **abgeschlossen**.

3.2 Linearer Aufspann

Sei V ein VR über K. Sei $M \subset V$ eine Teilmenge. Dann heißt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n \tag{1}$$

mit Vektoren $\vec{a}_i \in V$ und Skalaren $\lambda_i \in K$ **Linearkombination** von $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$.

Die Menge aller möglichen Linearkombinationen von Elementen von M nennt man den **linearen Aufspann** $\langle M \rangle$. $\langle M \rangle$ ist ein Untervektorraum von V.

$$\langle M \rangle := \left\{ \vec{x} \,|\vec{x} \in V, \text{ es existieren } m \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, \vec{a}_i \in M, i \in \{1, \cdots m\} \text{ mit } \vec{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i \right\} \tag{2}$$

Beispiel

Schauen wir uns die Menge X = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ an. Durch Addition von bestimmten Vielfachen der zwei Vektoren kann man jeden Vektor im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ darstellen. Der lineare Aufspann der Vektoren ist also der $\mathbb{R}^2$.

4 Lineare Abhängigkeit

Sei V ein VR über K und $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m \in V$ sowie $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$

1. $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m$ linear abhängig $:\Leftrightarrow \quad \lambda_1\vec{a}_1 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0$ und $(\lambda_1, \cdots \lambda_m) \neq (0, \cdots, 0)$

2. $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m$ linear unabhängig $:\Leftrightarrow$ für alle $\lambda_1, ..., \lambda_m$ gilt
$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \cdots \lambda_m) = (0, \cdots, 0)$

Diese Bedingungen führen jeweils auf Gleichungssysteme für die Koeffizienten λ_i. Durch Lösung des LGS kann man dann auf lineare Abhängigkeit schließen.

5 Basis

Sei V ein VR und $B \subset V$. B heißt **Basis** von V, wenn

1. $\langle B \rangle =$ V

2. $\vec{b}_i \in$ B sind linear unabhängig

Das bedeutet also, dass man jeden Vektor in V als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_i$ der Basis darstellen kann. Oder nochmals anders ausgedrückt: jeder Vektor $\vec{v} \in$ V lässt sich auf genau eine Art und Weise nach Vektoren einer Basis B entwickeln

$$\vec{a} = a_1\vec{b}_1 + ... + a_n\vec{b}_n \tag{3}$$

Die Zahlen $v_1, ..v_n$ sind somit die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ bezüglich der Basis B

5.1 Dimension

Sei B eine Basis des VR V, dann nennt man die Anzahl n der Elemente in B (also die Anzahl der linear unabhängigen Basisvektoren) die **Dimension** von V. Man schreibt $\dim(V) = n$. Da die Basen zu einem spezifischen VR immer die gleiche Anzahl linear unabhängiger Vektoren haben, hat ein VR auch immer nur eine Dimension.
Beispiele:

- $dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $dim(\{0\}) = 0$

6 Skalarprodukt

Betrachten wir zwei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ im $\mathbb{R}^3$. Der Winkel zwischen den beiden sei ϕ. Das Skalarprodukt ist nun ein Produkt zwischen zwei Vektoren (man nennt es daher 'inneres Produkt', also innerhalb eines VR), dessen Ergebnis ein Skalar ist.

$$\langle \vec{a}\,, \vec{b}\,\rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = ||\,\vec{a}\,|| \cdot ||\,\vec{b}\,|| \cdot \cos\phi \tag{4}$$

Bemerkungen:

- $\vec{a}$ steht senkrecht auf $\vec{b} \Rightarrow \langle \vec{a}\,, \vec{b}\,\rangle = 0$
- $\frac{\langle \vec{a}\,, \vec{b}\,\rangle}{||\,\vec{a}\,||} = ||\,\vec{b}\,|| \cos\phi$ ist die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

Diese Definition kennt ihr wahrscheinlich schon aus der Schule. Man kann das Skalarprodukt jedoch auch axiomatisch durch folgende Bedingungen einführen.

1. $\langle \vec{a} + \vec{b}\,, \vec{c}\,\rangle = \langle \vec{a}\,, \vec{c}\,\rangle + \langle \vec{b}\,, \vec{c}\,\rangle$
2. $\langle \lambda\vec{a}\,, \vec{b}\,\rangle = \lambda\langle \vec{a}\,, \vec{b}\,\rangle$
3. $\langle \vec{a}\,, \lambda\vec{b}\,\rangle = \lambda^*\langle \vec{a}\,, \vec{b}\,\rangle$ (* bedeutet komplexe Konjugation)
4. $\langle \vec{a}\,, \vec{b}\,\rangle = \langle \vec{b}\,, \vec{a}\,\rangle^*$
5. $\langle \vec{a}\,, \vec{a}\,\rangle \geq 0$ und $\langle \vec{a}\,, \vec{a}\,\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Somit gilt für das Skalarprodukt im komplexen $\mathbb{C}^n$

$$\langle \vec{a}\,, \vec{b}\,\rangle := \vec{a} \cdot \vec{b}^{\,*} \tag{5}$$

Die Axiome 1-5 lassen aber auch viel abstraktere Formen für ein Skalarprodukt zu, so ist der Ausdruck

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g^*(x)dx \qquad \text{f,g} :[a,b] \in \mathbb{C} \to \mathbb{C} \tag{6}$$

das Skalarprodukt für Funktionen.
Ich will im folgenden noch kurz auf die Schreibweise des Skalarprodukts mit Indizes eingehen, da dies eine elegante Möglichkeit der Rechnung eröffnet. Seien $\vec{e}_i$ (i=1,2,3) die kartesischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{a}\,, \vec{b}\,\rangle &= \langle \sum_i a_i\vec{e}_i, \sum_k b_k\vec{e}_k\rangle \\
&= \sum_i \sum_k a_i b_k \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k\rangle \\
&= \sum_i \sum_k a_i b_k \delta_{ik} \\
&= \sum_i a_i b_i
\end{aligned}$$

An dieser Stelle habe ich das Kroneckersymbol definiert

$$\delta_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad i = k \\ 0, & \text{wenn} \quad i \neq k \end{cases} \tag{7}$$

6.1 Norm

Mit einem Skalarprodukt '·' ist die **Norm** eines Vektors $\vec{x}$ definiert als

$$|| \vec{x} || \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \tag{8}$$

Dies entspricht der Länge des Vektors. Auch die Norm kann man axiomatisch formulieren als Abbildung von V nach $\mathbb{R}$

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.
Eine Abbildung

$$|| \cdot || : V \to \mathbb{R}, \quad \vec{a} \to || \vec{a} ||$$

heißt **Norm** auf V, wenn folgendes gilt:

i) $|| \vec{a} || \geq 0 \quad \text{und} \quad || \vec{a} || = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = 0$

ii) $|| \lambda \vec{a} || = |\lambda| \cdot || \vec{a} ||$

iii) $|| \vec{a} + \vec{b} || \leq || \vec{a} || + || \vec{b} ||$

Ist V ein VR und $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ eine Norm auf V, so nennt man V einen normierten Raum.

7 Vektorprodukt

Ein 'inneres' Produkt, dass zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ auf den Vektor $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ abbildet.

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Es reicht sich lediglich die erste Zeile zu merken. Die anderen Zeilen erhält man dann durch zyklisches Vertauschen ($1 \to 2 \to 3 \to 1$).
Eigenschaften:

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$
2. $(\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$
3. $\vec{z} \times (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{z} \times \vec{x} + \vec{z} \times \vec{y})$

Geometrische Interpretation:

- $\vec{x}, \vec{y}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow \vec{x} \times \vec{y}$ steht senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$
- $||\vec{x} \times \vec{y}|| = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \sin(\phi)$ ist die Fläche des von den Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms
- Die Vektoren $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Auch hier wollen wir das ganze in mit Indizes schreiben; wieder mit kartesisch orthonormierten Vektoren $\vec{e}_i$

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= \sum_j x_j \vec{e}_j \times \sum_k y_k \vec{e}_k \\ &= \sum_j \sum_k (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) x_j y_k \end{aligned}$$

Betrachten wir im folgenden nur die i-te Komponente des Kreuzprodukts

$$\begin{aligned} [\vec{x} \times \vec{y}]_i &= \sum_j \sum_k (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)_i x_j y_k \\ &= \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} x_j y_k \end{aligned}$$

Wie beim Skalarprodukt haben wir hier auch ein neues Symbol ϵ_{ijk}, das Levi-Civita-Symbol (kurz: ϵ Tensor) eingeführt

$$\epsilon_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)_i = \begin{cases} 0 & \text{falls zwei Indizes gleich sind} \\ 1 & \text{falls } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{falls } ijk = 213, 132, 321 \end{cases} \tag{10}$$

Oft ist auch folgende Relation wichtig

$$\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \tag{11}$$

8 Gram Schmidt Orthogonalisierungsverfahren

Verfahren zur Konstruktion einer Orthonormalbasis (d.h. die Basisvektoren sind senkrecht zueinander und haben Länge 1)
Sei $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ eine Basis eines VR V. Ziel ist es nun aus den $\vec{a}_i$ Vektoren $\vec{b}_i$ zu konstruieren die orthonormal sind und eine Basis bilden. Wir gehen wie folgt vor:

1. Normiere den ersten Vektor

$$\vec{b}_i = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} \tag{12}$$

2. Projeziere nächsten Vektor $\vec{a}_{k+1}$ auf zuvor normierten Vektor $\vec{b}_i$ und konstruiere einen orthogonalen Vektor $\vec{a}_{\perp,k+1}$

$$\vec{a}_{\perp,k+1} = \vec{a}_{k+1} - \vec{a}_{\parallel,k+1} = \vec{a}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle a_{k+1}, \vec{b}_i \rangle \vec{b}_i \tag{13}$$

3. Normieren

$$\vec{b}_{k+1} = \frac{\vec{a}_{\perp,k+1}}{|\vec{a}_{\perp,k+1}|} \tag{14}$$

4. Schritt 2 uns 3 so lange durchführen bis die Basis $\left\{\vec{b}_i\right\}$ komplett ist

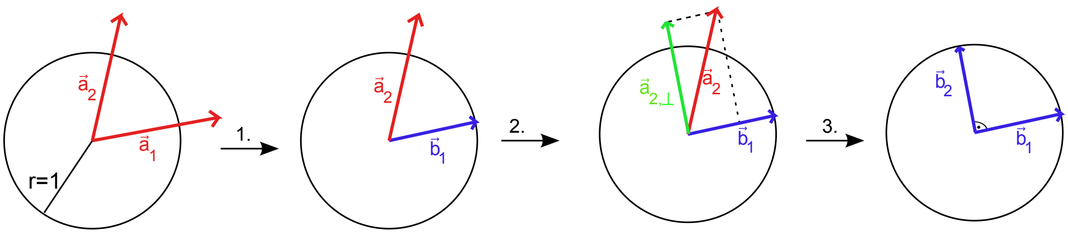

Abbildung 2: Graphische Darstellung zum Gram-Schmidt Verfahren