Ergänzung zur HMI ÜB Nr.6

Patrik Hlobil Niko Kainaris

Dieses Dokument erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit. Es stellt keine Vorlesungszusammenfassung dar, sondern soll euch lediglich bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben helfen

1 Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei $(f_n : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Funktionenfolge, d.h. eine Funktion, die neben der reellen Variablen x auch von einem natürlichen Parameter n abhängt. Alle f_n und f seien auf D_f definiert.

1.1 Punktweise Konvergenz

$$\forall x \in D_f \;\; \forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \;\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Das bedeutet, dass für alle x im Definitionsbereich die Grenzfunktion f(x) existiert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in D_f$$

1.2 Gleichmäßige Konvergenz

$$\forall x \in D_f \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall \epsilon > 0 \;\; \forall n \geq n_0 : \;\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Ein anderes Kriterium ist z.B.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D_f} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Anschaulich gesprochen bedeutet das Kriterium, dass alle Folgenglieder f_n ab einem n_0 innerhalb eines „ϵ-Schlauchs “um die Grenzfunktion f liegen. Gleichmäßige Konvergenz ist eine stärkere Forderung als punktweise Konvergenz.

1.2.1 Berechnung in der Praxis

- Findet man eine Nullfolge $\alpha_n \geq 0$, $\alpha_n \to 0$ so, dass

$$\begin{aligned} & |f_n(x) - f(x)| < \alpha_n \quad \text{für fast allen} \in \mathbb{N} \;\; \text{und} \forall x \in D_f \\ \Rightarrow \quad & (f_n) \;\; \text{konvergiert gleichmäßig gegen f} \end{aligned}$$

- Es gilt

$$(f_n) \text{ gleichmäßig konvergent} \wedge (f_n) \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ stetig}$$

d.h. Stetigkeit (oder auch Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit) übertragen sich bei gleichmäßiger Konvergenz von der Funktionenfolge auf die Grenzfunktion. Insbesondere bedeutet dies, dass man z.B. Integral und Grenzwert vertauschen kann

$$\lim_{n\to\infty} \int dx\, f_n(x) = \int dx \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int dx\, f(x)$$

Negiert man obige Bedingung erhält man

$$f \text{ nicht stetig} \Rightarrow (f_n) \text{ nicht gleichmäßig konvergent} \vee (f_n) \text{ nicht stetig}$$

Ist eure Grenzfunktion f also nicht stetig und eure Funktionenfolge f_n stetig an einem $x \in D_f$ so kann f_n nicht gleichmäßig konvergent sein.

1.3 Beispiel

Sei $f_n = \sin(\frac{x}{n})$, $D_f = (0,1)$. Damit konvergiert f_n punktweise gegen $f(x) = 0$,denn

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{x}{n}) = \sin(0) = 0$$

Außerdem konvergiert die Folge auch gleichmäßig

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sin(\frac{x}{n}) - 0\right| \leq \frac{x}{n} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

Weitere Standardbeispiele findet ihr im Skript und auf dem ÜB.