Ergänzung zur HMI ÜB Nr.7

Patrik Hlobil Niko Kainaris

Dieses Dokument erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit. Es stellt keine Vorlesungszusammenfassung dar, sondern soll euch lediglich bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben helfen

1 Grenzwerte von Funktionen

Seien $x_0, y \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man nennt y Grenzwert der Funktionswerte f(x) für x gegen x_0 wenn gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Für jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n \in \mathbb{D} \text{ und } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$
$$\text{gilt } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$$

In Worten ausgedrückt heißt das, dass für jede Folge, die auf der x-Achse gegen x_0 konvergiert, die Bildfolge $f(x_n)$ auf der y-Achse gegen den Wert y konvergieren muss.

Zusätzlich kann man noch einen links- bzw rechtsseitigen Grenzwert definieren

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_n > x_0}} f(x) \quad \text{rechtsseitiger Grenzwert}$$
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_n < x_0}} f(x) \quad \text{linksseitiger Grenzwert}$$

Wir nähern uns dem Wert x_0 mit unseren Folgengliedern also einmal von rechts und einmal von links. Der Grenzwert existiert, wenn sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existieren und diese gleich sind.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existiert} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) \text{ und } \lim_{x \to x_0-} f(x) \text{ existieren}$$
$$\text{und } \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

1.1 Berechnung von Grenzwerten

Hier will ich nochmals die wichtigsten Methoden zur Berechnung von Grenzwerten kurz zusammenfassen.

1. Zerlegung in Linearfaktoren (z.B durch Polynomdivision)
2. Reihendarstellung von Funktionen
3. Satz von de l'Hospital

1.1.1 Satz von de l'Hospital

Der Satz von L'Hospital kommt in der Vorlesung erst später, ich erwähne ihn aber trotzdem, da er zum Thema passt.

Für zwei differenzierbare Funktionen $f(x), g(x)$ sollen folgende Voraussetzungen auf dem Intervall $I = (a, b)$ gelten :

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ oder ∞
2. $g'(x) \neq 0$
3. $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ konvergent oder bestimmt divergent für $x \to x_0$

Sind diese Bedingungen erfüllt gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkung:
Unbestimmte Divergenz heißt in diesem Fall nur, dass die Funktion nicht eindeutig konvergent ist, also mehrere Häufungspunkte besitzt.

Beispiel (für $x \to \infty$):

i) $f(x) = \frac{x - x^2 \cos x}{x^2}$ ist unbestimmt konvergent für $x \to \infty$, da der Kosinus dort oszilliert also mehrere Häufungspunkte besitzt

ii) $g(x) = x^3$ ist bestimmt divergent, da $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

1.1.2 Beispiele

1. Zerlegung in Linearfaktoren

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

2. Reihenentwicklung

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots}{x} = \lim_{x \to 0} 1 - \frac{1}{6}x^2 + \cdots = 1$$

3. Satz von de l'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$

2 Stetigkeit

Zur Definition von Stetigkeit gibt es zwei äquivalente Kriterien. Qualitativ kann man sich Stetigkeit so vorstellen, dass eine kleine Ursache auch nur eine kleine Wirkung hervorbringt. Ändert man also den x-Wert ein wenig, so ändert sich der Funktionswert an dieser Stelle auch nur um einen kleinen Betrag.

Etwas formeller wird das ganze durch folgende Definitionen beschrieben.

2.1 Folgenstetigkeit

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Für jede Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } x_n \in \mathbb{D} \text{ und} \\ x_n \to x_0 \text{ für } (n\to\infty) \text{ gilt } f(x_n) \to f(x_0) \text{ für } (n \to \infty) \end{array}$$

Etwas einfacher ausgedrückt heißt das, wenn f in x_0 stetig ist, darf man die Bildung des Funktionswerts und den Grenzwert vertauschen

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0) \tag{1}$$

2.2 Stetigkeit nach Cauchy

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ heißt stetig in x_0 wenn gilt

$x_0 \in \mathbb{D}$ und für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, x_0)$, so dass für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{2}$$

Die Definition bedeutet, dass wir eine ϵ Umgebung U_ϵ um $f(x_0)$ vorgegeben haben. Nun müssen wir dazu eine passende δ Umgebung U_δ, wobei δ von unserer Wahl von ϵ und der Stelle x_0 abhängt, finden, so dass U_δ durch f in U_ϵ abgebildet wird.

Diese Definition müsst ihr im Prinzip nie explizit anwenden, sondern es gibt einfachere Kriterien um Stetigkeit zu untersuchen.

2.3 Bestimmung von Stetigkeit

2.3.1 Kompositionen von stetigen Funktionen sind stetig

Standardfunktionen wie Polynome, rationale und Potenzfunktionen, Trigonometrische Funktionen, e-Funktion, etc. sind auf ihrem Definitionsbereich stetig. Ebenso sind aus stetigen Funktionen zusammengesetzte Funktionen stetig. Dies dürft ihr ohne Beweis stets voraussetzen.

2.3.2 Stetigkeit über Grenzwerte

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$, falls

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Beachtet, dass wir nicht nur fordern, dass der Grenzwert existiert (mit beliebigem Wert y) sondern auch das der Grenzwert gleich dem Funktionswert an der entsprechenden Stelle ist. Stetigkeit auf einem Intervall $[a, b]$ bedeutet, dass f in jedem $x_0 \in [a, b]$ stetig ist und in a rechtsseitig und in b linksseitig stetig ist.

Bemerkung

- Im Gegensatz zur formellen Definition über das $\epsilon - \delta$ Kriterium, kann man Grenzwerte leichter zur Bestimmung von Stetigkeit anwenden. Besonders bei stückweise definierten Funktionen muss man für Stetigkeit in x_0 fordern, dass

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

3 Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Somit gibt es eine Stelle $x_{\max}$ bzw. $x_{\min}$ an der f ihren maximalen bzw. minimalen Wert im Intervall $[a, b]$ annimmt. Es gibt dann für jedes $y \in [f(x_{\min}), f(x_{\max})]$ eine Stelle $x_0 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) = y$$

Ein Spezialfall dieses Satzes ist der Nullstellensatz. Dieser besagt im Prinzip, dass wenn eine stetige Funktion f(x) in einem Intervall $[a, b]$ sowohl negative als auch positive Funktionswerte hat, dass es dazwischen mindestens eine Nullstelle geben muss. Das ist anschaulich recht schnell einzusehen.