Ergänzung zur HMI ÜB Nr.9

Patrik Hlobil Niko Kainaris

Dieses Dokument erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit. Es stellt keine Vorlesungszusammenfassung dar, sondern soll euch lediglich bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben helfen

1 Differenzierbarkeit

Eine Funktion f heißt differenzierbar an einer Stelle x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

oder äquivalent

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

existiert.

Beachte :

- Man nennt f in einem Intervall I differenzierbar, wenn der Grenzwert für alle $x \in I$ existiert.
- Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit . Oder wenn wir die Aussage negieren: nicht stetig $\Rightarrow$ nicht differenzierbar.
  D.h. differenzierbare Funktionen müssen stetig sein.
- Kompositionen differenzierbarer Funktionen sind ebenfalls differenzierbar.

1.1 Rechenregeln

1.1.1 Produktregel

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \frac{df}{dx}\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{dg}{dx}$$

Beispiel:

$$\frac{d}{dx}\left(x\cdot\cos(x)\right) = 1\cdot\cos(x) + x\cdot(-\sin(x)) = \cos(x) - x\sin(x)$$

1.1.2 Kettenregel

$$\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right) = \frac{df\left(g(x)\right)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Beispiel:

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x^2)\right) = \left(-\sin(x^2)\right) \cdot 2x = -2x \cdot \sin(x^2)$$

1.1.3 Ableitung der Umkehrfunktion

Erinnern wir uns zunächst an die Bedeutung einer Umkehrfunktion:

Sei f eine auf dem Intervall I definierte Funktion. f ist auf I umkehrbar, wenn es zu jedem $y \in f(I)$ genau eine Lösung $x \in I$ mit f(x) = y gibt. Dies ist immer der Fall wenn f auf I bijektiv ist. In diesem Fall ist die Umkehrfunktion gegeben durch $f^{-1}(x) : f(I) \to I$. Es gilt dann

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x \tag{1}$$

Leiten wir nun die Gleichung (1) nach x ab (Kettenregel beachten).

$$\frac{df(f^{-1}(x))}{df^{-1}}\frac{df^{-1}}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{\frac{df(f^{-1}(x))}{df^{-1}}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beispiel: $f(x) = e^x$ und $f^{-1}(x) = \ln(x)$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{\frac{de^{\ln(x)}}{d(\ln(x))}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

1.1.4 Ableitung von Potenzreihen

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ x^k$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt

1. Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k \ x^{k-1}$ hat ebenfalls den Konvergenzradius r
2. Die durch

   $$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ x^k \qquad (-r < x < r)$$

   definierte Funktion f ist differenzierbar, und es gilt

   $$f'(x) := \sum_{k=1}^{\infty} ka_k \ x^{k-1} \qquad (-r < x < r)$$

   d.h es ist

   $$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \ x^k\right)'$$

2 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei f eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion. Dann gibt es mindestens eine Stelle $t \in (a, b)$ mit

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Graphisch kann man das so interpretieren, dass man immer eine Stelle t so finden kann, dass die Steigung der Tangente an der Stelle t gleich der Steigung der Sekanten durch die Punkte bei x=a und x=b ist.

2.1 Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Seien f,g auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktionen und $g'(x) \neq 0$ für alle x in $[a, b]$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt mindestens eine Stelle $t \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

3 Extrema einer Funktion

Wenn ihr die Extremwerte einer Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ bestimmen sollt gibt es drei Arten von Punkten, die ihr untersuchen müsst

- Die Punkte $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$
- Die Randpunkte des Intervalls $x = a$ und $x = b$
- Stellen an denen f nicht differenzierbar ist

Beachtet : die Bedingung $f'(x) = 0$ ist ein notwendiges Kriterium, d.h.

$$\text{f hat in } x_0 \text{ ein Extremum} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

die Umkehrung gilt nicht. Z.B. gilt für $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$ aber f(x) hat an der Stelle $x = 0$ keinen Extrempunkt.

4 Monotonieverhalten

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ nennt man **monoton wachsend (fallend)**, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 > x_2$ die Ungleichung $f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$ gilt.
Kommt die Gleichheit in der Ungleichung nicht vor, so spricht man von strenger Monotonie.

Einfach ausgedrückt werden die Funktionswerte bei monoton wachsenden Funktionen immer größer und bei monoton fallenden Funktionen nehmen sie ab.

Sei f eine in [a,b] stetige und in (a,b) differenzierbare Funktion. Dann gilt

(a) $f'(x) > 0 \quad (x \in (a,b)) \;\Rightarrow$ f(x) ist in $[a,b]$ streng monoton wachsend

(b) $f'(x) \geq 0 \quad (x \in (a,b)) \;\Leftrightarrow$ f(x) ist in $[a,b]$ monoton wachsend

(c) $f'(x) < 0 \quad (x \in (a,b)) \;\Rightarrow$ f(x) ist in $[a,b]$ streng monoton fallend

(d) $f'(x) \leq 0 \quad (x \in (a,b)) \;\Leftrightarrow$ f(x) ist in $[a,b]$ monoton fallend

(e) $f'(x) = 0 \quad (x \in (a,b)) \;\Leftrightarrow$ f(x) ist in $[a,b]$ konstant